

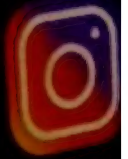
المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

الجزء
الثاني

٢٠٢١



عند اقتناء ملزمتك من دار المغرب تأكد من وجود
الجلدة المدورة اللاصقة
في وجه الغلاف غير ذلك تعتبر مزورة .



mlazmn



الأستاذ حيدر وليد

07701780364

المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

السادس العلمي

المعادلات
التفاضلية

5

التكامل

4

تطبيقات
التفاضل

3

الأحيائي والتطبيقي

2021



مارم دار المغرب
07702729223



الجزء الثاني

الأستاذ حيدر وليد

07701780364

second
part

2021



السادس العلمي

الأحيائي والتطبيقات



نحذر من استنساخها ولا يجوز ذلك لكونها من أشكال سرقة علمي وفلسفي
وغير ميراث الذمة والمزرعة موقفة من الكتب والنقود
علما ان ملازمنا جائزة على علامة تجارية من وزارة التعليم العالي
دائرة التطوير والتنظيم

هام
للغاية

كل نسخة لا تحمل علامة
دار النشر للطباعة
تعتبر مهربة

ملاحظة :- من صفحة 139 الى صفحة 147 (خاص بالتطبيقات)



منذ ان اخترنا مجال الطباعة والنشر كان دافعنا ورائدنا هو محبتنا وتعلقنا الصميمي بتلك المهنة الشريفة في طباعة ونشر العلوم والآداب والمعارف بشتى صنوفها العلمية والإنسانية، الى جانب طباعة ما يحتاجه الناس في مختلف شؤونهم المهنية واعمالهم الصناعية والتجارية . نحسب أننا قطعنا شوطاً طويلاً ناهز الأربعين عاماً إتسم بتراكم الخبرات والتجارب مع تطور كبير في خدماتنا الطباعية ومنجزنا الفني والمهني ، ولانبالغ القول أن مطبوعاتنا التي لازمت علامتنا دار المغرب كانت ومازالت تقترن بالجودة والإتقان العالي ، ولعل استمرارتنا على ذات النهج هو سر نجاحنا الذي لانحيد عنه أبداً ، وإننا إذ ننظر لرصيدنا الفني والتقني وسمعتنا الطيبة بين نظرائنا ، نسعى لتعزيز أدائنا بالإفادة من التطورات في عالم الطباعة والانفتاح على أحدث تقنياتها العالمية من خلال تواصل مطبعتنا (دار المغرب) بالمؤسسات الطباعية المعروفة خارج القطر ومواكبة آخر التطورات في مجال طباعة الكتب ، نستخدم في دارنا أفضل وسائل الطباعة الملونة وتقنيات التذهيب الحراري البارز والفاخر والتصوير التجسيمي (ثلاثي الأبعاد-الهولكرام) لإعطاء أهمية في عرض منتجاتنا الطباعية والمساعدة للحد من حالات الاستنساخ الذي يفقد جمالية الكتاب وحفاظاً لحقوق مؤلفيها وضماناً لحقوقنا الطباعية ، قمنا بتسجيل إصداراتنا في الدوائر المختصة مع رقم الإيداع في المكتبة الوطنية ، ومن الناحية التطبيقية عملنا ما ليس باستطاع المقلدين إعادة طباعتها كما هي في الأصل وبالتالي يسهل كشفها وإفشالها ومقاضاتها قانونياً واستخدمنا باج بلاستيكية لاصقاً يحتوي على تصميم بطباعة غائرة عبارة عن علامة تحمل اسم مطبعتنا واسم مؤلفها وهذا الباج يلصق على كل نسخة تصدر من مطبعتنا، فضلاً عن التقنيات المستخدمة في طباعة الغلاف سالقة الذكر ، وهما نحن الآن نقدم بين أيديكم ملازمنا الدراسية لمرحلة السادس الإعدادي سعيين أن نبذل قصارى جهودنا في إخراج مطبوع جميل يضيف البهجة والسرور لنفسية الطالب في بنيته الشكلية ومادته العلمية المنسقة والمطبوعة بأوراق ناعمة وبطباعة ملونة أنيقة مريحة للبصر باستخدام الورق الناعم الطافئ (آرت مت) وهو ورق غالي الثمن قياساً بالورق الاعتيادي الذي يسهم في زيادة الدقة والجودة، تعاقدت مطبعتنا مع أساتذة موهبين في مجال تخصصاتهم ولهم خبرة عالية في التدريس، وحين استلامنا المادة العلمية (اللمزمة) من الاستاذ مباشرة نقوم بإعادة تنضيدها وتنسيق وتوضيب صفحاتها وفصولها ومراجعتها قبل الطباعة ، وأسسنا مراكز تسويقية في كافة محافظات العراق، لسهولة حصول واقتناء الطالب على ملازمنا، نتمنى لأبنائنا الطلبة التوفيق والنجاح لأنهم عماد المستقبل، وإذا كان لديهم ملاحظات وجيهة فليكتبوا لنا على بريدنا الالكتروني لمناقشتها مع الاساتذة وكادرنا الفني سعياً للارتقاء الى الأفضل دائماً ، أما الكمال فאלله وحده، وهو ولي التوفيق.



جمهورية العراق
وزارة الصناعة والمعادن
دائرة التطوير والتنظيم الصناعي
قسم العلامات والبيانات التجارية

شهادة تسجيل علامة
CERTIFICATE OF REGISTRATION

رقم العلامة / ٧٥٩٤٧ صدرت في اليوم () من شهر () سنة ()



دار المغرب

الى : مطبعة المغرب

العنوان : العراق - بغداد - البتاوين

عملاً بأحكام المادة (١٥) من قانون العلامات والبيانات التجارية رقم (٢١) لسنة ١٩٥٧ المعدل فأنتم تشهدون بهذه العلامة التجارية الواردة ذكرها في طلبكم المؤرخ في (٢٠١٨ / ٢ / ١٤) قد أعلن عنها حسب الأصول تحت رقم (٧٥٩٤٧) في العدد (٥٧٧) من منشور العلامات والبيانات التجارية الصادرة في (٢٠١٨ / ٢ / ٢٣) وسجلت باسمكم في الصنف (١٦ - أب ج د هـ)

يستمر التسجيل نافذاً لمدة عشر سنوات من تاريخ تقديم طلب التسجيل (٢٠١٨ / ٢ / ١٤) ويجوز التجديد لمدة أخرى أمد كل منها ١٠ سنوات

علاء موسى علي
مسجل العلامات التجارية



صفحة ملازم
دار المغرب



mlazmna



مطبعة المغرب



مجاز

المديرية العامة للتنمية الصناعية / وزارة الصناعة والمعادن
رقم الأجازة ٢٢٠٩٥
من قبل

كامل التأسيس

يحل محل استصحابها ولا يجوز ذلك لكون فيها أشكال شرعي وقانوني وغير مبرر الذمة والمصلحة موثقة من دار الكتب والوثائق علماً أن ملازمنا حاضرة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي

المُسْنَدُ حَيْدَرُ وَلِيد

المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ



2021

3

تطبيقات التفاضل

الفصل الثالث

الأحيائي و التطبيق

07702729223



ملازم دار المغرب

المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ



ملازم دار المغرب



07700728223

قوانين أساسية

$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

قوانين نصف الزاوية

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

قوانين ضعف الزاوية

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

لدينا ستة دوال مثلثة وهي: $(\sin x - \cos x - \tan x - \cot x - \sec x - \csc x)$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (\cos) \quad \text{مقلوب الـ}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \quad (\sin) \quad \text{مقلوب الـ}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \quad (\tan) \quad \text{مقلوب الـ}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x}$$

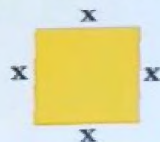
$$\sin x = \frac{1}{\csc x}$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

قوانين مهمة تفهم وتحفظ

- 1 (الطول . العرض) $A = x^2$ المساحة
(مجموع الأضلاع) $P = 4x$ المحيط



- 2 الطول . العرض = مساحة المستطيل
 $A = x \cdot y$ $P = 2(x + y)$

$A = x \cdot y$ $P = 2(x + y)$

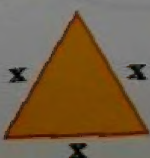
- 3 $A = \frac{1}{2} x \cdot h$ المثلث

$A = \frac{1}{2} (x \cdot h)$ (الارتفاع) (القاعدة)
 $P = 3x$ مجموع أضلاعه الثلاث



المثلث المتساوي الأضلاع

$A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$
 $P = 3x$



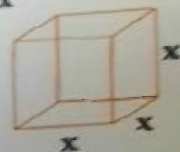
- 4 $A = \pi r^2$ مساحة الدائرة
 $P = 2\pi r$ المحيط



- 5 $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ حجم الكرة
 $A = 4\pi r^2$ مساحة الكرة السطحية



- 6 الارتفاع . مساحة القاعدة $V = x \cdot x \cdot x \rightarrow V = x^3$



المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة
المساحة الجانبية = محيط القاعدة . الارتفاع

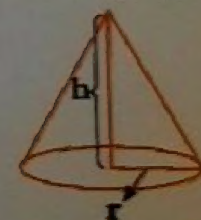
$TA = 4x \cdot x + 2(x^2)$
 $TA = 4x^2 + 2x^2$ المساحة الكلية
 $TA = 6x^2$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة . الارتفاع

$LA = 4x \cdot x$
 $LA = 4x^2$

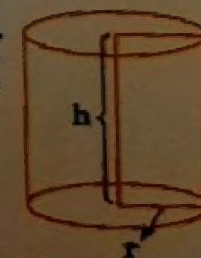
- 7 المخروط $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ الارتفاع . مساحة القاعدة . الحجم

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
 $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$



- الاسطوانة $V = \pi r^2 h$ الارتفاع . مساحة القاعدة . الحجم

$TA = 2\pi r h + 2(\pi r^2)$
مساحة قاعدة واحدة
مساحة الجانبية
محيط القاعدة . الارتفاع

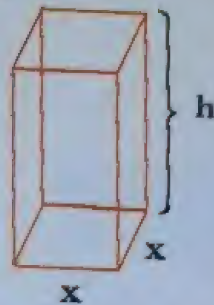


متوازي مُستطيلات

قاعدة مربعة

$V =$ مساحة القاعدة . الارتفاع

$$V = x^2 \cdot h$$



$$T.A = \text{مساحة القاعدة واحدة} + 2 \left(\text{مساحة الجانبيه} \right) \cdot \text{الارتفاع}$$

$$T.A = 4x \cdot h + 2(x^2)$$

قاعدة مستطيلة



$V =$ الارتفاع . مساحة القاعدة

$$V = xy \cdot h$$

$$T.A = \text{مساحة القاعدة واحدة} + 2 \left(\text{مساحة الجانبيه} \right) \cdot \text{الارتفاع}$$

$$T.A = (2x + 2y) \cdot h + 2xy$$

حجم الجليد =

حجم الشكل مع الجليد - حجم الشكل بدون جليد

أي شكل من شكلين بالجليد

قبل ان نسلو نشتك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغ
التواصل الاجتماعي او ايضاً بالهاتفون او اجهزة نقل الم
مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سوا
وقانوني (ونشر ميراث الذمة) كل من يقوم بهذه الأفعال . علما ان
على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم
هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شه
المرفعي الرقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) والعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٤
واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق

تجديد ماء جلد

المشتقة

أولاً، مشتقة الثابت = تساوي صفر

$$f(x) = a \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$$

$$f(x) = -5 \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$$

$$f(x) = 3 \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$$

$$f(x) = -\sqrt{2} \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow \bar{f}(x) = nx^{n-1}$$

ثانياً، مشتقة x^n

* n عدد صحيح موجب:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \bar{f}(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow \bar{f}(x) = 4x^3$$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow \bar{g}(x) = 2x$$

$$h(x) = 3x^3 \Rightarrow \bar{h}(x) = 9x^2$$

$$f(x) = 2x^5 \Rightarrow \bar{f}(x) = 10x^4$$

* n عدد صحيح سالب:، فالأس سينزاد كرقم
بمقدار واحد

$$f(x) = x^{-3} \Rightarrow \bar{f}(x) = -3x^{-4}$$

$$f(x) = x^{-2} \Rightarrow \bar{f}(x) = -2x^{-3}$$

$$f(x) = -2x^{-4} \Rightarrow \bar{f}(x) = +8x^{-5}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{5}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

* إذا كان الأس كسر
بسط
مقام

عند تقليل الأس بمقدار واحد يطبق
القانون البسط - المقام
المقام

$$f(x) = x \Rightarrow \bar{f}(x) = 1$$

ملاحظة مشتقة x تساوي واحد 1

ملاحظة (1)

$$f(x) = 3x \Rightarrow \bar{f}(x) = 3$$

مشتقة ax تساوي a

ملاحظة (2)

$$f(x) = 7x \Rightarrow \bar{f}(x) = 7$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{2}$$

كل x^n بالبقاء ترفع إلى البسط

ملاحظة (3)

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow f(x) = x^{-3} \Rightarrow \bar{f}(x) = -3x^{-4} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{-3}{x^4}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = x^{-1} \Rightarrow \bar{f}(x) = -1x^{-2} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2} \Rightarrow f(x) = 3x^{-2} \Rightarrow \bar{f}(x) = -6x^{-3} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{-6}{x^3}$$

$$\sqrt[n]{(\quad)^m} \Rightarrow (\quad)^{\frac{m}{n}}$$

داخل خارج

كيف نتخلص من الجذر

ملاحظة (4)

$$\sqrt[n]{(\quad)^m} \Rightarrow (\quad)^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{(\quad)^m} \Rightarrow (\quad)^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{(\quad)^m} \Rightarrow (\quad)^{\frac{m}{n}}$$

ثالثاً، مشتقة حاصل جمع أو طرح مجموعة دوال:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow \bar{f}(x) = \bar{g}(x) \pm \bar{h}(x)$$

$$f(x) = x^3 + x^4 \Rightarrow \bar{f}(x) = 3x^2 + 4x^3$$

أمثلة بسيطة (أساسية)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 1$$

$$\bar{f}(x) = 3x^2 - 6x + 7 - 0$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\bar{f}(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3 \quad f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

رابعاً: مشتقة حاصل ضرب دالتين:

المشتقة = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

$$1 \quad f(x) = (x^3 + 5x + 2)(x^3 + 2)$$

الأولى الثانية

$$\bar{f}(x) = (x^3 + 5x + 2)(3x^2) + (x^3 + 2)(3x^2 + 5)$$

الأولى مشتقة الثانية الثانية مشتقة الأولى

$$2 \quad g(x) = (x^2 + 2)(x^3 - x^2 + x + 1)$$

$$\bar{g}(x) = (x^2 + 2)(3x^2 - 2x + 1) + (x^3 - x^2 + x + 1)(2x)$$

المُسند في الرياضيات

خامساً: مشتقة حاصل قسمة دالتين (بسط ومقام).

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2} = \text{المشتقة}$$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{(x^2 + 1)(6x) - (3x^2 + 2)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{6x^3 + 6x - 6x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

سادساً: القوس البرفوع إلى اس:

$$f(x) = [g(x)]^n \rightarrow \bar{f}(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot \bar{g}(x)$$

الاس

نفس القوس
نطرح من
الاس واحد

مشتقة
داخل القوس

$$f(x) = (x^2 + 2)^3 \rightarrow \bar{f}(x) = 3(x^2 + 2)^2 (2x)$$

$$\bar{f}(x) = 6x(x^2 + 2)^2$$

ملاحظة

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \rightarrow \bar{f}(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

مشتقة الجذر التربيعي:

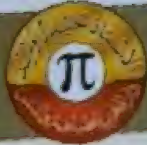
مشتقة داخل الجذر

المشتقة =

$2 \sqrt{\text{نفس الجذر}}$

(تستعمل اثناء الحل للسرعة) ولا يجوز حل
سؤال المشتقة بهذه الطريقة بل نتخلص من
الجذر ونستخدم قاعدة (6)

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5x} \rightarrow \bar{f}(x) = \frac{2x + 5}{2\sqrt{x^2 + 5x}}$$



مشتقات الدوال المثلثية:

- 1 $y = \sin x \Rightarrow \bar{y} = \cos x$. مشتقة الزاوية
- 2 $y = \cos x \Rightarrow \bar{y} = -\sin x$. مشتقة الزاوية
- 3 $y = \tan x \Rightarrow \bar{y} = \sec^2 x$. مشتقة الزاوية
- 4 $y = \cot x \Rightarrow \bar{y} = -\csc^2 x$. مشتقة الزاوية
- 5 $y = \sec x \Rightarrow \bar{y} = \sec x \cdot \tan x$. مشتقة الزاوية
- 6 $y = \csc x \Rightarrow \bar{y} = -\csc x \cdot \cot x$. مشتقة الزاوية

ملاحظة

... الخ تعتبر قوس مرفوع إلى أس $\tan^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

الاشتقاق الضمني

عند اشتقاق علاقة ضمنية فكل y يتم اشتقاقها بضرب بـ \bar{y} كما في المثال التوضيحي التالي:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$2x + 2y\bar{y} = 0 \Rightarrow 2y\bar{y} = -2x \Rightarrow \bar{y} = -\frac{x}{y}$$

تنويه

الاشتقاق الضمني سوف يتم التركيز عليه في الفصل الخامس بشكل مفصل أما في الفصل الثالث فلا نحتاجه سوى في مثال واحد أو مثالين

مثال 1 إذا علمت أن $y^2 + x^2 = 1$ فبرهن على أن: $y \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$$2y \frac{dy}{dx} + 2x = 0 \quad \left[\div 2 \right] \rightarrow y \frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 = 0$$

حاصل ضرب دالتين

$$y \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 0 = 0$$

$$y \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

٢٠ هـ ٩

قد مضت بين جماله وجلاله
وغدا لسان الحال عني مخبراً
فأحذر لحاظك فني محاسن وجهه
تلقه جميع النعم فيه مصوراً

مثال 2 إذا كانت $y = \cos 2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

$$\frac{dy}{dx} = -(2) \sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -(2)(2) \cos 2x \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -4 \cos 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4(-2) \sin 2x \rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = 8 \sin 2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 8(2) \cos 2x \rightarrow \frac{d^4y}{dx^4} = 16 \cos 2x$$

تمارين (3-1)

سؤال 1 جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل ما يأتي:

a $y = \sqrt{2-x}$, $\forall x < 2$

$$y = (2-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{2}(2-x)^{\frac{1}{2}}(-1)$$

$$\bar{y} = \frac{-1}{2(2-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\bar{y} = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}$$

$$\bar{y} = \frac{-1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{+1}{4}(2-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)$$

$$= \frac{-1}{4(2-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt{(2-x)^3}}$$

ملاحظة

$$\bar{f}(x) = \bar{y} = \frac{dy}{dt}$$

$$\bar{f}(x) = \bar{y} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

b $y = \frac{2-x}{2+x}, \quad x \neq 2$

$$\bar{y} = \frac{(2+x) \cdot (-1) - (2-x) (1)}{(2+x)^2}$$

$$\bar{y} = \frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2}$$

$$\bar{y} = \frac{-4}{(2+x)^2}$$

مشتقة أولى

$$\bar{y} = -4 (2+x)^{-2} \quad (\text{تعديل})$$

$$\bar{y} = +8 (2+x)^{-3} \quad (1)$$

$$\bar{y} = \frac{8}{(2+x)^3}$$

بتحل بطريقتين!
- نرفع القوس
للجس و يصبح الاس
سالب
- طريقه البسط والمقام

* ان وجدت x في البسط لا نرفع القوس
لانه سيصبح حاصل ضرب دالتين فالأولى
الحل بالقسمة

c $2x \cdot y - 4y + 5 = 0$

$$2(x \cdot (1) \bar{y} + y(1)) - 4 \bar{y} + 0 = 0$$

$$[2x \bar{y} + 2y - 4 \bar{y} = 0] + 2 \Rightarrow x \bar{y} + y - 2 \bar{y} = 0$$

$$x \bar{y} - 2 \bar{y} = -y \quad \text{نسحب } \bar{y} \text{ عامل مشترك}$$

$$\bar{y} (x-2) = -y$$

$$\bar{y} = \frac{-y}{x-2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{(x-2)(-\bar{y}) - (-y)(1)}{(x-2)^2}$$

$$\bar{y} = \frac{-\bar{y}(x-2) + y}{(x-2)^2} = \frac{-\left(\frac{-y}{x-2}\right) \cdot (x-2) + y}{(x-2)^2}$$

$$\bar{y} = \frac{y+y}{(x-2)^2} = \frac{2y}{(x-2)^2}$$

ملاحظة

في الاشتقاق الضمني كل
مشتقة لـ y يتم ضرب
الناتج بـ \bar{y} وهي $\frac{dy}{dx}$

* هناك عدة طرق
لحل هذا السؤال

1 $f(x) = 4\sqrt{6-2x}$

$$f'(x) = 4(6-2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 2(6-2x)^{-\frac{3}{2}} \quad (-2)$$

$$f'''(x) = -4(6-2x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'''(x) = 2(6-2x)^{-\frac{3}{2}} \quad (-2)$$

$$f'''(x) = -4(6-2x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'''(x) = 6(6-2x)^{-\frac{3}{2}} \quad (-2) \Rightarrow f'''(x) = \frac{-12}{(6-2x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'''(x) = \frac{-12}{\sqrt{(6-2x)^3}} \Rightarrow f'''(1) = \frac{-12}{\sqrt{(6-2)^3}} = \frac{-12}{\sqrt{(4)^3}} = \frac{-12}{2^3} = \frac{-12}{32} = \frac{-3}{8}$$

2 $f(x) = \sin(\pi x)$

$$f'(x) = \pi \cos(\pi x)$$

$$f''(x) = \pi(-\sin(\pi x)) \cdot \pi$$

$$f''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x)$$

$$f'''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x) \cdot \pi$$

$$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$$

$$f'''(1) = -\pi^3 \cdot \cos \pi(1)$$

$$= -\pi^3(-1) = \pi^3$$



3 $f(x) = \frac{3}{(2-x)} , x \neq 2$

$f(x) = 3(2-x)^{-1}$

$f'(x) = -3(2-x)^{-2} (-1)$

$f'(x) = 3(2-x)^{-2}$

$f''(x) = -6(2-x)^{-3} (-1)$

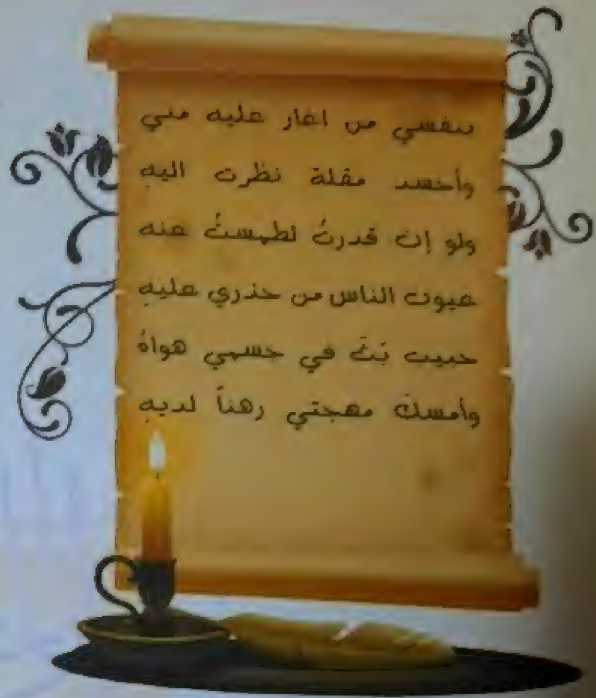
$f''(x) = 6(2-x)^{-3}$

$f'''(x) = -18(2-x)^{-4} (-1)$

$f'''(x) = 18(2-x)^{-4}$

$f'''(x) = \frac{18}{(2-x)^4}$

$f'''(1) = \frac{18}{1} = 18$



إذا كانت $y = \tan x$ برهن ان $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$

سؤال 3

$y = \tan x$

$y = \sec^2 x \Rightarrow \bar{y} = (\sec x)^2$ قوس مرفوع لأس

$y = 2(\sec x) \cdot \sec x \tan x$

$y = 2 \sec^2 x \cdot \tan x$

$\bar{y} = \frac{d^2y}{dx^2}$



فكر

إذا كانت $y = \sec x$ برهن انه:

$y(2y^2 - 1) = \bar{y}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$ (العلاقة هذه معطى بالسؤال)

$2 \sec^2 x \cdot \tan x = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$

$2 \sec^2 x \cdot \tan x = 2 \tan x \cdot \sec^2 x$

RHS = LHS

قانون

$\sec^2 x$

سؤال 4: إذا كان $y = x \sin x$ برهن ان $y^{(4)} - y + 4 \cos x = 0$

$$y = x \sin x \Rightarrow \bar{y} = x \cos x + \sin x \quad (1)$$

$$\bar{y} = x(-\sin x) + (\cos x)(1) + \cos x$$

$$\bar{y} = -x \sin x + 2 \cos x$$

$$\bar{y} = -[x \cos x + \sin x(1)] + 2(-\sin x)$$

$$\bar{y} = -x \cos x - \sin x - 2 \sin x$$

$$\bar{y} = -x \cos x - 3 \sin x$$

$$y^{(4)} = -[x(-\sin x) + (\cos x)(1)] - 3 \cos x$$

$$y^{(4)} = x \sin x - \cos x - 3 \cos x$$

$$y^{(4)} = x \sin x - 4 \cos x$$

$$y^{(4)} - y + 4 \cos x = 0 \Rightarrow \text{علاقة السؤال}$$

$$x \sin x - 4 \cos x - x \sin x + 4 \cos x = 0 \quad \text{التعويض بعلاقة السؤال}$$

$$0 = 0$$

$$R.H.S = L.H.S$$

في اشتقاق المنصبا :

- لا نعوض في علاقة
رأيت اننا

- ان نحول علاقة (إذا)
الى علاقة رأيت اننا

واجب

إذا كان $y = \tan x$ برهن ان $2y\bar{y} - \bar{\bar{y}} = 0$

إذا كان $y = \sin 2x$ اثبت ان $4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 16$

إذا كان $y^2 = x^2(1-x)$ اثبت ان $y\bar{y} + (\bar{y})^2 + 3x = 1$

إذا كان $x^2 + 2y^2 = 4$ اثبت ان $yy^{(3)} + 3\bar{y}\bar{\bar{y}} = 0$

سؤال 1

سؤال 2

سؤال 3

سؤال 4

المعادلات الزمنية

المتغير	معدل التغير
A = مساحة	$\frac{dA}{dt}$ = معدل التغير في المساحة
V = حجم	$\frac{dV}{dt}$ = معدل التغير في الحجم
r = نصف القطر	$\frac{dr}{dt}$ = معدل التغير في نصف القطر
θ = زاوية	$\frac{d\theta}{dt}$ = معدل التغير في الزاوية
h = الارتفاع	$\frac{dh}{dt}$ = معدل التغير في الارتفاع

ملاحظات

1: كل وحدة قياس تحوي زمن $\left(\frac{\text{زمن}}{\text{زمن}}\right)$ فهذا معدل تغير $\frac{d\Box}{dt}$

* إذا كانت وحدة القياس تحوي تكعيب فهذا معدل تغير حجم $\leftarrow \frac{dV}{dt} = 0.5 \text{ cm}^3 / \text{s}$

* إذا كانت وحدة القياس تحوي تربيع فهذا معدل تغير مساحة $\leftarrow \frac{dA}{dt} = 2 \text{ cm}^2 / \text{s}$

تأني: التعبير:

1 (يشرب، ينقص، ينخفض، ينوب، يقل، ينقلص، ينكمش) معناها الإشارة - سالبة

2 (يصب، يزداد، يزيد، يتمدد) معناها الإشارة + موجبة

* مكعب جليدي يذوب بمعدل $0.01 \text{ cm}^3 / \text{min}$... الخ.

$$\frac{dV}{dt} = - 0.01 \text{ cm}^3 / \text{min}$$

* مرشح مخروطي يصب فيه سائل بمعدل $0.3 \text{ m}^3 / \text{h}$... الخ.

$$\frac{dV}{dt} = + 0.3 \text{ m}^3 / \text{h}$$

ثالثاً: الثابت في السؤال

عندما يعطى (مساحة - حجم) ثابت فهنا نستخدم قانون المساحة أو الحجم لإيجاد مجهول معين

▶ اسطوانة ذات حجم ثابت $125 \pi \text{ cm}^3$ ارتفاعها 5 cm ... الخ

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h$$

$$[125 \pi = \pi r^2 5] + 5$$

$$r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

▶ صفيحة مستطيلة ذات مساحة ثابتة دائماً 90 cm^2 وطولها 9 cm ... الخ

$$\Rightarrow A = x y$$

$$90 = 9 (y)$$

$$y = \frac{90}{9} = 10 \text{ cm}$$

رابعاً: الاشتقاق بالنسبة للزمن يكون اشتقاق اعتيادي ولكن عند اشتقاق X نضرب بـ $\frac{dx}{dt}$ وعند اشتقاق Y نضرب بـ $\frac{dy}{dt}$ وهكذا... لاحظ الامثلة التالية:

4 $A = x \cdot y$

$$\frac{dA}{dt} = x \cdot \frac{dy}{dt} + y \cdot \frac{dx}{dt}$$

1 $x^2 + y^2 = 10$

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

5 $V = \frac{\pi}{12} h^3$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3 h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

2 $\sin x = y$

$$(\cos) \cdot (1) \cdot \frac{dx}{dt} = (1) \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\cos x \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

6 $V = (3+2x)^3$

$$\frac{dv}{dt} = 3 (3+2x)^2 (2) \cdot \frac{dx}{dt}$$

3 $V = \pi r^2 \cdot h$

$$\frac{dv}{dt} = \pi \left[r^2 \cdot \frac{dh}{dt} + h \cdot 2r \cdot \frac{dr}{dt} \right]$$

الجزء الأول / الأشكال الهندسية

سؤال 2 اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل 0.5 cm/s بحيث يبقى الحجم ثابت ويساوي $320\pi \text{ cm}^3$ جد معدل التغير في نصف القطر عندما يكون الارتفاع 5 cm

نفرض نصف قطر الاسطوانة $r =$

نفرض ارتفاع الاسطوانة $h =$

$$\frac{dh}{dt} = 0.5 \text{ cm/s}$$

$$V = 320\pi \text{ cm}^3 \text{ ثابت}$$

$$\frac{dr}{dt} = ? \quad h = 5 \text{ cm}$$



نبدأ بالثابت لايجاد معلومة نحتاجها فيها بعد.

$$V = \pi r^2 h$$

$$320\pi = \pi (r^2) (5)$$

$$r^2 = \frac{320}{5} = 64 \Rightarrow r = 8 \text{ cm}$$

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 320\pi = \pi r^2 h$$

$$320 = r^2 h$$

$$0 = r^2 \cdot \frac{dh}{dt} + h (2r) \frac{dr}{dt}$$

$$0 = (8)^2 \cdot (0.5) + (5)(2)(8) \frac{dr}{dt}$$

$$0 = (64)(0.5) + 80 \frac{dr}{dt}$$

$$\left[-32 = 80 \frac{dr}{dt} \right] + 80$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-2}{5} \text{ cm/s}$$

سؤال 1 صفيحة مستطيلة من البعدت مساحتها 96 cm^2 يتمدد طولها بمعدل 2 cm/s بحيث تبقى مساحتها ثابتة جد معدل النقصان في عرضها عندما يكون العرض 8 cm

نفرض طول المستطيل $x =$

نفرض عرض المستطيل $y =$

$$\text{معدل تغير الطول} = \frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s}$$

$$\text{معدل تغير العرض} = \frac{dy}{dt} = ?$$

$$y = 8 \text{ cm} \quad x = ? \quad A = 96 \text{ cm}^2$$

$$A = x \cdot y$$

$$96 = (x)(8)$$

$$x = \frac{96}{8} \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

$$A = xy \Rightarrow 96 = xy$$

$$0 = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} \quad \text{اشتقاق}$$

$$0 = (12) \frac{dy}{dt} + (8)(2)$$

$$-16 = 12 \frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-4}{3} \text{ cm/s}$$

نبدأ بالثابت لايجاد معلومة نحتاجها فيها بعد.

2011 / 2د

2014 / 3د

2015 / بازاحين

2016 / 1د / خارج القطر

سؤال 4 اسطوانة دائرية قائمة بصب فيها ماء بمعدل تغير زمني في ارتفاع الماء 40 cm/s جد معدل التغير في حجم الماء إذا كانت نصف قطر قاعدة الاسطوانة يساوي 10 cm .

نفرض نصف قطر الاسطوانة $r =$

نفرض ارتفاع الاسطوانة $h =$

$$\frac{dh}{dt} = +40 \text{ cm/s}$$

$$r = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{dv}{dt} = ?$$



$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$V = \pi (10)^2 \cdot h$$

$$V = 100 \pi h$$

$$\frac{dv}{dt} = 100 \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 100 \pi (40)$$

$$\frac{dv}{dt} = 4000 \pi \text{ cm}^3/\text{s}$$

2017 / 2د / تطبيقي

سؤال 3 خزانات مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل طولها (2 m) ينصرف منه الماء بمعدل $(0.4 \text{ m}^3/\text{h})$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزانات عند أي زمن t .

نفرض طول ضلع القاعدة $x =$



نفرض طول ضلع القاعدة $x =$

نفرض الارتفاع $h =$

$$x = 2 \text{ m}$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$\frac{dv}{dt} = -0.4 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$V = x^2 \cdot h$$

$$V = (2)^2 \cdot h$$

$$V = 4h$$

يمكن التعويض بـ $x=2$ لأنها ثابتة

$$\frac{dv}{dt} = 4 \frac{dh}{dt}$$

$$-0.4 = 4 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-0.4}{4}$$

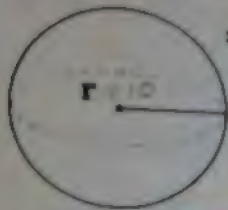
$$\frac{dh}{dt} = -0.1 \text{ m/h}$$

1د / 2011

2د / 2013

سؤال 6 بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فإذا

كان معدل نقصان نصف قطره $\frac{7}{22}$ cm/s بحيث يبقى محافظاً على شكله فعندما يكون نصف قطره 10 cm جد:



1 معدل نقصان حجمه.

نفرض نصف قطر الكرة البالون r

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{7}{22} \text{ cm/s}, \quad r = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{dv}{dt} = ?$$

$$\frac{4}{3} \cdot \pi$$

15/2004

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

حاصلات (3)

$$\frac{dv}{dt} = 4 \pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 4 \left(\frac{22}{7} \right) (10)^2 \cdot \left(-\frac{7}{22} \right)$$

$$\frac{dv}{dt} = -400 \text{ cm}^3/\text{s}$$

2 معدل نقصان مساحته السطحية.

$$\frac{dA}{dt} = ?$$

$$A = 4 \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 8 \pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 8 \cdot \frac{22}{7} (10) \cdot \left(-\frac{7}{22} \right)$$

$$\frac{dA}{dt} = -80 \text{ cm}^2/\text{s}$$

سؤال 5 متوازي سطوح مستطيلة تتغير

ابعاده بحيث تبقى القاعدة

مربعة يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل

0.3 cm/s وارتفاعه يتناقص بمعدل

0.5 cm/s جد معدل تغير الحجم عندما

يكون طول ضلع القاعدة 4 cm والارتفاع 3 cm



نفرض طول ضلع القاعدة x

نفرض الارتفاع h

$$\frac{dx}{dt} = 0.3 \text{ cm/s}, \quad \frac{dh}{dt} = -0.5 \text{ cm/s}$$

$$\frac{dv}{dt} = ?$$

$$h = 3 \text{ cm}, \quad x = 4 \text{ cm}$$

$$V = x^2 \cdot h$$

$$\frac{dv}{dt} = x^2 \cdot \frac{dh}{dt} + h \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = (4)^2 (-0.5) + (3)(2)(4)(0.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = (16)(-0.5) + (24)(0.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = -8 + 7.2$$

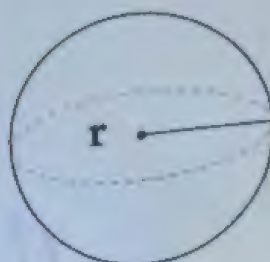
$$\frac{dv}{dt} = -0.8 \text{ cm}^3/\text{s}$$

حيدر وليد

سؤال 7

بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقبه يتسرب منه الغاز فاذا كانت النسبة بين معدل نقصان حجمه الى معدل نقصان قطره 200π احسب معدل نقصان حجمه عندما يكون معدل نقصان في مساحته السطحية $80 \text{ cm}^2/\text{s}$.

2008/2 د



نصف قطر = r
قطر = $2r$

نفرض نصف قطر البالون r

نفرض معدل تغير الحجم $\frac{dv}{dt}$

نفرض معدل تغير نصف القطر $\frac{dr}{dt}$

نفرض معدل تغير المساحة $\frac{dA}{dt}$

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{d(2r)}{dt}} = \frac{200\pi}{1} \Rightarrow \frac{\frac{dv}{dt}}{2 \cdot \frac{dr}{dt}} = \frac{200\pi}{1}$$

$$\frac{dv}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$400\pi \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$[400 = 4r^2] \div 4 \Rightarrow r^2 = 100$$

$$r = 10 \text{ cm}$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$-80 = 8\pi (10) \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-80}{80\pi} = \frac{-1}{\pi} \text{ cm/s}$$

$$\frac{dv}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt} = 400\pi \left(\frac{-1}{\pi}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = -400 \text{ cm}^3/\text{s}$$

سؤال 8

متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل وحجمه دائماً 108 cm^3 فاذا كان معدل ازدياد ارتفاعه $\frac{3}{4} \text{ cm/s}$ جد معدل تغير طول ضلع القاعدة عندما يكون الارتفاع 12 cm .

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-3}{32} \text{ cm/s} \quad / \text{ج}$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين
= محيط القاعدة \times الارتفاع + مساحة القاعدتين



$$A = 4(x) \cdot (3x) + 2 \cdot x^2$$

$$A = 12x^2 + 2x^2$$

$$A = 14x^2$$

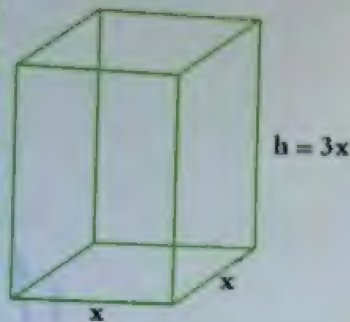
$$\frac{dA}{dt} = 28x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 28 \left(\frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{dA}{dt} = 56 \text{ cm}^2 / \text{s}$$

أنت الذي أهديتني حريتي
وهويتني وجعلت مني سيدا
وأعدت لي فرحك وسحر طفولتي
من دون أن تدري ولا أن تقصدا
أنت الذي لو لأك عشت بلا غد
وبقيت بالأمس البعيد مقيدا

سؤال 9 متوازي سطوح مستطيلة
قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ثلاثة أمثال
طول القاعدة ويتهدد بالحرارة جد معدل
تغير حجمه ومساحته الكلية عندما يكون
طول ضلع القاعدة 8 cm علماً أن معدل
تغير طول ضلع القاعدة $\frac{1}{4} \text{ cm/s}$



نفرض طول ضلع القاعدة x

الارتفاع $3x$

$$x = 8 \text{ cm}, \quad \frac{dA}{dt} = ?, \quad \frac{dv}{dt} = ?$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4} \text{ cm/s}$$

$$V = x^2 \cdot h$$

$$V = x^2 (3x)$$

$$V = 3x^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 9x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 9(8)^2 \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{dv}{dt} = 9(64) \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{dv}{dt} = 144 \text{ cm}^3 / \text{s}$$

مسائل التعمد هي كل سؤال يكون رسمه بشكل مثلث قائم الزاوية ونستفيد من القوانين التالية لحل المسائل

نستفيد من هذه القوانين في حال اعطيت أو طلت معدل تغير الزاوية.

نستخدم هذا القانون لإيجاد علاقة تربط x مع y عندما يعطى زاوية.

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

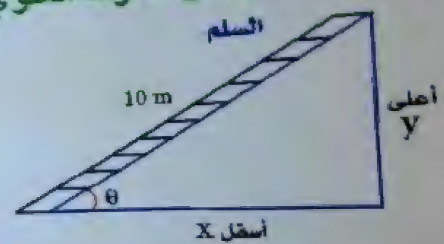
① نستخدمه قبل الاشتقاق لإيجاد مجهول

② نستخدمه بعد الاشتقاق لإيجاد معدل زمني

سؤال 10

سلم طوله 10 m يستند طرفه الأعلى حائط رأسي وطرفه الأسفل على أرض أفقية فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 m/s عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 8 m جد:

أولاً: معدل انزلاق الطرف العلوي.



$$\left[2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \right] \div 2$$

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$8(2) + (6) \left(\frac{dy}{dt} \right) = 0$$

$$\left[6 \frac{dy}{dt} = -16 \right] \div 6 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3} \text{ m/s}$$

ثانياً: معدل تغير الزاوية بين السلم والأرض.

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{10} \quad \frac{y}{10} \xrightarrow{\text{امنها}} \frac{1}{10} y$$

$$\cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{x}{10} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{dy}{dt} \quad (\text{مجاور}) \quad (\text{وتر})$$

$$\frac{8}{10} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{-8}{3} \quad \text{تعويض}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{3} \text{ rad/s}$$

1 د / 2012

2 د / 2014

2014 / تمهيدى

x = نفرض بعد الطرف الأسفل

y = نفرض بعد الطرف العلوي

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/s}, \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

$$x = 8 \text{ m}, \quad y = ?$$

$$x^2 + y^2 = (10)^2$$

$$(8)^2 + y^2 = (10)^2 \Rightarrow 64 + y^2 = 100$$

$$y^2 = 100 - 64 \Rightarrow y^2 = 36 \quad \text{بالجذر}$$

$$y = 6 \text{ m}$$

$$x^2 + y^2 = (10)^2 \quad \text{نشتق بالنسبة للزمن}$$

$$\left[(x)(2) + (\sqrt{3}x) \frac{dy}{dt} = 0 \right] + x, x \neq 0$$

$$2 + \sqrt{3} \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\left[\sqrt{3} \frac{dy}{dt} = -2 \right] + \sqrt{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2}{\sqrt{3}} \text{ m/s}$$

2013 / د1 / خارج القطر

2015 / د1 / خارج القطر

2015 / وصافة

2016 / د2 / الزاوية $\frac{\pi}{4}$

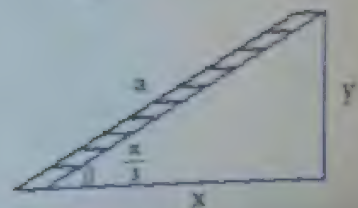
واجب: سلم طوله 10m يتكى طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بحيث يكون معدل تغير الزاوية بين السلم والأرض $\frac{1}{3} \text{ rad/s}$ جد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 8m.

مشابه السؤال

10

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3} \text{ m/s}$$

سؤال 11 سلم يعتمد طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 m/s جد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض $\frac{\pi}{3}$.



$x =$ نفرض بعد الطرف الأسفل

$y =$ نفرض بعد الطرف العلوي

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{dy}{dt} = ? \quad \frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/s}$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\left[2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \right] \div 2$$

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{y}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{y}{x}$$

$$y = \sqrt{3} x \quad \dots\dots\dots (2)$$

طريقان متعامدان تسير سيارة على الطريق الأول بسرعة 80 km/h وتسير سيارة على الطريق الآخر بسرعة 60 km/h جد معدل ابتعاد السيارتين بعد مرور ربع ساعة.

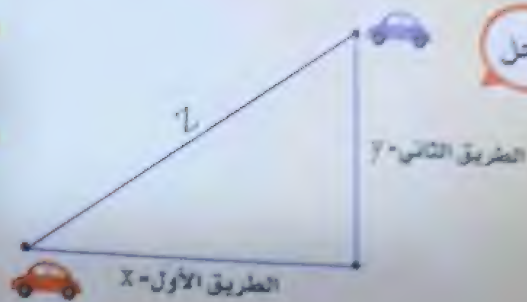
سؤال 12

سرعة الطريق الأول $\frac{dx}{dt} = 80 \text{ km/h}$

سرعة الطريق الثاني $\frac{dy}{dt} = 60 \text{ km/h}$

معدل ابتعاد السيارتين $\frac{dz}{dt} = ?$

(الوقت ربع ساعة) $t = \frac{1}{4} \text{ h}$



الزمن \times السرعة = الإزاحة

$$x = 80 \times \frac{1}{4} = 20 \text{ km}$$

$$y = 60 \times \frac{1}{4} = 15 \text{ km}$$

$$1600 + 900 = 25 \frac{dz}{dt}$$

$$\left[2500 = 25 \frac{dz}{dt} \right] \div 25$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2500}{25}$$

$$\frac{dz}{dt} = 100 \text{ km/h}$$

تمويض دون
انشقاق

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= Z^2 \\ (20)^2 + (15)^2 &= Z^2 \\ 400 + 225 &= Z^2 \\ Z^2 &= 625 \end{aligned}$$

بالجذر

$$\Rightarrow Z = 25 \text{ km}$$

نشتق بالنسبة للزمن $x^2 + y^2 = Z^2$

$$\left[2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2Z \frac{dz}{dt} \right] \div 2$$

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = Z \frac{dz}{dt}$$

$$(20)(80) + (15)(60) = 25 \frac{dz}{dt}$$

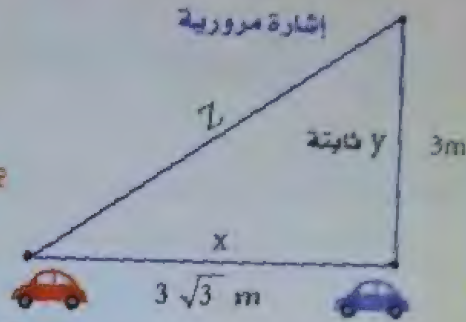
سيارة تسير بسرعة (30 m/s) اجتازت إشارة مرورية على ارتفاع (3m) وبعد
ان ابتعدت مسافة $3\sqrt{3}$ m عن قاعدة العمود اصطدمت بسيارة أخرى بسبب
عدم الالتزام بقوانين المرور جد سرعة تغير المسافة بين الإشارة والسيارة .

سؤال 13

الحل

$$\frac{dx}{dt} = 30 \text{ m/s}$$

$$\frac{dz}{dt} = ? \quad x = 3\sqrt{3} \quad y = 3 \text{ m} \quad Z = ?$$



الارتفاع = 3
ثابت
السيارة
المسافة بين

الارتفاع = 3
ثابت

الارتفاع = 3
ثابت

الارتفاع = 3
ثابت

الارتفاع = 3
ثابت

الارتفاع = 3
ثابت

الارتفاع = 3
ثابت

هذا غرامك في عيونك قد بدا
قل لي أحبك لا تكن متوردا
كل الزهور تقولها بعبيرها
ويقولها العصفور إن هو غزدا
قلها لأعرف أن خبك لم يكن
حلماً إن طلع الصباح تبذرا
قلها فأن المستحيل على يدي
سيكون في إمكانه أن يوجد
قلها "صباح الخير" أو سلم بها
ليظل خبك في دمي متوقدا

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= Z^2 \\ (3\sqrt{3})^2 + (3)^2 &= Z^2 \\ 27 + 9 &= Z^2 \\ Z^2 &= 36 \end{aligned}$$

بالجذر

$$Z = 6 \text{ m}$$

$$x^2 + y^2 = Z^2$$

1997 / د1

$$x^2 + (3)^2 = Z^2 \quad \text{تعويض } y \text{ لأنه ثابت}$$

$$\left[2x \frac{dx}{dt} + 0 = 2Z \frac{dz}{dt} \right] \div 2 \quad \text{اشتقاق}$$

$$(3\sqrt{3})(30) = (6) \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(30)(3\sqrt{3})}{6}$$

$$= \frac{dz}{dt} = 15\sqrt{3} \text{ m/s}$$

تنبيه

في هذا السؤال خطأ في
الصياغة ولكي يكون منطقياً يجب أن
يكون العمود غير مستقر في الأرض
والإشارة معلقة وتهر السيارة تحنها
مباشرة وعندها ستكون $z = 3\sqrt{3}$

الجزء الثالث / النقاط على منحنى

الحالة الأولى: عندما يطلب نقطة أو نقاط تنتمي إلى منحنى بدون أن يذكر معدل اقتراب أو ابتعاد.

- 1 نشتق علاقة السؤال الأصلية بالنسبة للزمن.
- 2 نجد علاقة بين $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ من السؤال أو نعوض $\frac{dy}{dt}$ ، $\frac{dx}{dt}$ إذا أعطيت في السؤال بشكل ارقام.
- 3 نكون معادلة من العلاقة بعد الاشتقاق ثم نحوض هذه المعادلة بعلاقة السؤال الأصلية.

قبل
الاشتقاق

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$$

$$x^2 + (2-x)^2 + 4x - 8(2-x) = 108$$

$$x^2 + 4 - 4x + x^2 + 4x - 16 + 8x - 108 = 0$$

$$[2x^2 + 8x - 120 = 0] + 2$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0 \text{ تجربة}$$

$$(x+10)(x-6) = 0$$

$$x+10=0 \Rightarrow x=-10$$

$$x-6=0 \Rightarrow x=6$$

$$y=2-x \quad x=-10 \text{ عندما}$$

$$y=2-(-10) \Rightarrow y=12$$

$$(-10, 12)$$

$$x=6 \text{ عندما}$$

$$y=2-6 \Rightarrow y=-4$$

$$(6, -4)$$

2014/نازحين

2019/تمهيدى

سؤال 14
كتاب

الحل

جد نقط تنتمي إلى الدائرة

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$$

المعدل الزمني لتغير x مساوياً

للمعدل الزمني لتغير y بالنسبة

للزمن t .

نشتق علاقة السؤال $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$

$$\left[2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} + 4 \frac{dx}{dt} - 8 \frac{dy}{dt} = 0 \right] + 2$$

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + 2 \frac{dx}{dt} - 4 \frac{dy}{dt} = 0$$

علاقة بين $\frac{dy}{dt}$ ، $\frac{dx}{dt}$ من السؤال $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dx}{dt} + 2 \frac{dx}{dt} - 4 \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} (x + y + 2 - 4) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ نهمل}$$

$$x + y - 2 = 0$$

$$y = 2 - x \quad (1)$$

نعوضها في العلاقة المعطاة في السؤال

تتحرك نقطة على المنحني $xy = x + y + 7$ وكانت معدل تغيير إحداثياتها السيني بالنسبة للزمن (2unit/s) ومعدل تغيير إحداثياتها الصادي بالنسبة للزمن (-1unit/s) جد إحداثيات النقطة.

سؤال 15
إضافي

أما $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

أو $y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

$x = 2y - 1$ عندما $y = 3$

$x = 2(3) - 1$

$x = 6 - 1 \Rightarrow x = 5$

$P_1 = (5, 3)$

$x = 2(-1) - 1$ عندما $y = -1$

$x = -2 - 1 \Rightarrow x = -3$

$P_2 = (-3, -1)$

واجب: تتحرك نقطة على المنحني $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0$ أوجد إحداثيات النقطة إذا كان معدل تغيير إحداثياتها السيني بالنسبة للزمن ضعف معدل تغيير إحداثياتها الصادي بالنسبة للزمن.

ج/ $(-1, 2), (3, -6)$

$\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = -1$

نشتق العلاقة $xy = x + y + 7$

$x \cdot \frac{dy}{dt} + y \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$

$(x)(-1) + (y)(2) = 2 - 1$

$-x + 2y = 1 \Rightarrow 2y - 1 = x$

$x = 2y - 1$ نعوضها بالأصلية

$x \cdot y = x + y + 7$

$(2y - 1) \cdot y = 2y - 1 + y + 7$

$2y^2 - y = 3y + 6$

$2y^2 - y - 3y - 6 = 0$

$[2y^2 - 4y - 6 = 0] \div 2$

تجربة $y^2 - 2y - 3 = 0$

$(y - 3)(y + 1) = 0$

المُسند في الرياضيات

تتبع الخطوات التالية:

$$\frac{ds}{dt}$$

الحالة الثانية: عندما يعطى أو يطلب معدل اقتراب أو ابتعاد $\left(\frac{ds}{dt}\right)$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1. تطبيق قانون المسافة

2. نعوض (x_1, y_1) , (x_2, y_2)

3. نجعل المعادلة بدلالة x فقط أو y فقط بالاستعانة بعلاقة السؤال.

4. نشق بالنسبة للزمن ونجد ما هو مطلوب.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 - 10x + 49)^{-\frac{1}{2}} (2x - 10) \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x - 10}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$0.2 = \frac{8 - 10}{2\sqrt{16 - 40 + 49}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$0.2 = \frac{-2}{10} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -1 \text{ unit/s}$$

3د / 2016

2016 / تمهيدى

1د / 2013

واجب: نقطة تتحرك على القطع
الكافى $y^2 = 8x$ مبتعدة عن النقطة
(2,0) بسرعة 0.7 unit/s جد معدل
تغير الاحداثى السيني في اللحظة التي
يكون عندها $x = 8$.

$$\frac{dx}{dt} = 0.7 \text{ unit/s}$$

سؤال 16 لنكن (M) نقطة متحركة

على منحنى القطع الكافى $y^2 = 4x$
بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة
(7,0) يساوي 0.2 unit/s جد المعدل
الزمني لتغير الاحداثى السيني للنقطة
(M) عندما تكون $x = 4$

(x_1, y_1)

(x_2, y_2)

(7, 0)

M (x, y)

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x - 7)^2 + (y - 0)^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x}$$

$$S = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$$

$$S = (x^2 - 10x + 49)^{\frac{1}{2}}$$

2 تطبيقات التفاضل
الاحيائي
التطبيقي

إذا لم يعطى
بالسؤال النسبة
الزمنية
يمكن استخراجها
من معادلة القطع
لصاف
لا تمثل
البؤرة

سؤال 17 لتكن M نقطة نتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$ جد إحداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0, \frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الإحداثي الصادي للنقطة M.

$$9y^2 - 4y^2 - 18y + 8y = 0$$

$$[5y^2 - 10y = 0] + 5$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y(y - 2) = 0$$

تعمل $y = 0$ أما

$$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$y = x^2 \Rightarrow 2 = x^2 \text{ بالجذر}$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

$$(\pm \sqrt{2}, 2)$$

2018 / 2د / أحيائي

2014 / 1د

2012 / 2د

تنبيه وزاري

في سنة (2014 / 1د) تم تغيير صيغة السؤال حيث استبدل كلمة ثلثي ووضع مكانها كلمة ثلث فكان الناتج غريب.

$$x = \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}}$$

قصة (تلقب)
تلقب

ثلاثين اثنين
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, 2(\frac{1}{2})$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$x_1, y_1 \quad x_2, y_2$$

$$(0, \frac{3}{2}) \quad M(x, y)$$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - \frac{3}{2})^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \quad x^2 = y$$

$$S = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$$

$$S = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

$$S = (y^2 - 2y + \frac{9}{4})^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} (y^2 - 2y + \frac{9}{4})^{-\frac{1}{2}} (2y - 2) \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y - 2}{2 \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{2(y-1)}{2 \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{(y-1)}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}$$

$$2 \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3y - 3$$

$$4(y^2 - 2y + \frac{9}{4}) = 9y^2 - 18y + 9$$

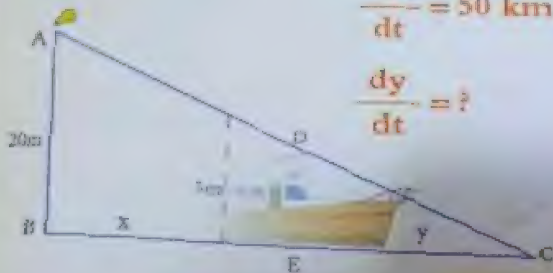
$$4y^2 - 8y + 9 = 9y^2 - 18y + 9$$

لا يجوز ان
تربع الطرفين
عندما يوجد
جذر

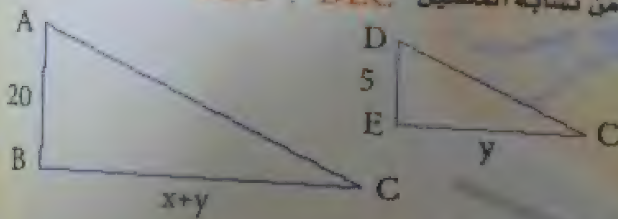
سؤال 19 فانار ميناء إرتفاعه 20m يعلوه مصباح كبير تحركت سفينة إرتفاعها 5m مبتعدة عن الفانار بسرعة 50 km/h جد تغيير طول ظل السفينة على سطح البحر.

$$\frac{dx}{dt} = 50 \text{ km/h}$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$



من تشابه المثلثين ABC , DEC



$$\frac{20}{5} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow \frac{4}{1} \times \frac{x+y}{y}$$

$$4y = x + y \Rightarrow 3y = x$$

$$3 \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$3 \frac{dy}{dt} = 50$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{50}{3} \text{ km/h}$$

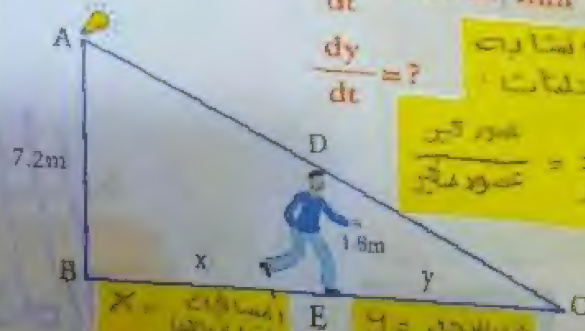
في قانون تشابه المثلثات :
اليس بالفروور - تحويل الوحدات

1a/2016 / خارج القطر

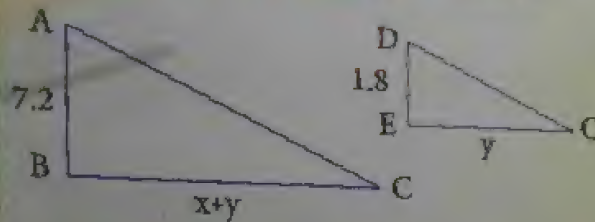
سؤال 18 عمود طوله 7.2 m في نهايته مصباح ينحرك رجل طوله 1.8 m مبتعداً عن العمود وبسرعة 30 m/min جد معدل تغيير طول ظل الرجل.

$$\frac{dx}{dt} = +30 \text{ m/min}$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$



من تشابه المثلثين ABC , DEC



$$\frac{7.2}{1.8} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow \frac{4}{1} \times \frac{x+y}{y}$$

$$4y = x + y \Rightarrow 3y = x$$

$$3 \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$3 \frac{dy}{dt} = 30$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{30}{3} = 10 \text{ m/min}$$

تمهيد / 2012

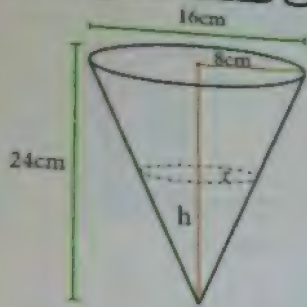
تمهيد / 2014

تمهيد / 2015

1a / 2013

1a / 2015

سؤال 21 مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه إلى الأسفل وارتفاعه 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5 \text{ cm}^3/\text{s}$ ويتسرب منه سائل بمعدل $1 \text{ cm}^3/\text{s}$ احسب معدل التغيير في نصف قطر السائل عندما يكون نصف القطر 6cm.



r = نصف قطر السائل
 h = ارتفاع السائل

إذا معدل التغير
يصحاح المعدل
الارتفاع للمعدل

$$\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\frac{dr}{dt} = ? \quad r = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{24}{h} \times \frac{8}{r} \Rightarrow [24r = 8h] \div 8$$

$$h = 3r$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 (3r) \Rightarrow V = \pi r^3$$

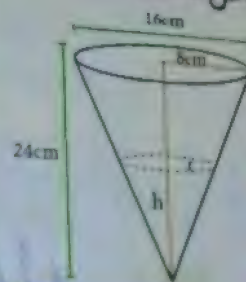
$$\frac{dv}{dt} = 3 \pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$4 = 3 \pi (6)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{3 \pi (36)}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{27 \pi} \text{ cm/s}$$

سؤال 20 مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه للأسفل وارتفاعه 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5 \text{ cm}^3/\text{s}$ ويتسرب منه سائل بمعدل $1 \text{ cm}^3/\text{s}$ جد معدل تغيير عمق السائل عندما يكون عمق السائل 12cm.

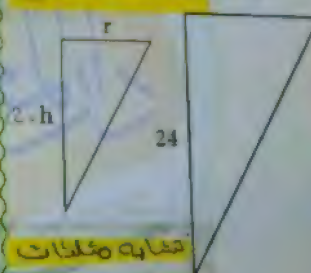


r = نصف قطر السائل
 h = ارتفاع السائل

$$\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\frac{dh}{dt} = ? \quad h = 12 \text{ cm}$$

علاقة السائل والارتفاع



من تشابه المثلثين

$$\frac{24}{h} = \frac{8}{r}$$

$$[24r = 8h] \div 8$$

$$r = \frac{1}{3} h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{3} h\right)^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{1}{9} h^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{\pi}{27} h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$4 = \frac{\pi}{9} (12)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$4 = 16 \pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4 \pi} \text{ cm/s}$$

2017 / 4 د / النبار

2016 / نازحين

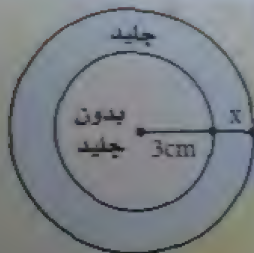
سؤال 23 كرة صلبة نصف قطرها 3cm

مغطاة بطبقة من الجليد بحيث يبقى الشكل ثابتاً فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $4 \text{ cm}^3/\text{s}$ حدد معدل نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون السمك فيها 1cm.

x = نفوس سمك الجليد

$\frac{dx}{dt}$ = معدل تغير سمك الجليد

$\frac{dv}{dt} = -4 \text{ cm}^3/\text{s}$



حجم الجليد = حجم الشكل - حجم الأصلي
مع الجليد بدون جليد

$V = \frac{4}{3} \pi (3+x)^3 - \frac{4}{3} \pi (3)^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3} \pi (3+x)^2 \frac{dx}{dt} - 0$

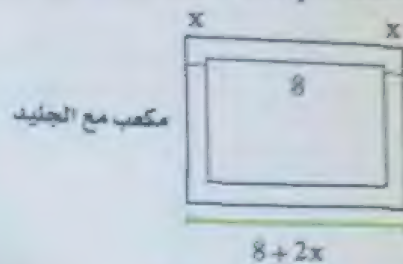
$-4 = \frac{4}{3} \pi (3+1)^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow -1 = \pi (4)^2 \frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{16\pi} \text{ cm/s}$

أعطي معدل ذوبان الجليد
طلب معدل نقصان سمك الجليد
يجب إيجاد حجم الجليد
في تلك اللحظة التي يجب

سؤال 22 مكعب صلب طول حرفه 8cm

مغطى بطبقة من الجليد بحيث يبقى الشكل مكعباً فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6 \text{ cm}^3/\text{s}$ حدد معدل نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها السمك 1cm.



x = نفوس سمك الجليد

$\frac{dx}{dt}$ = معدل نقصان سمك الجليد

$\frac{dv}{dt} = -6 \text{ cm}^3/\text{s}$

حجم الجليد = حجم الشكل - حجم الأصلي
مع الجليد بدون جليد

$V = (8+2x)^3 - (8)^3$

$\frac{dv}{dt} = 3(8+2x)^2 (2) \frac{dx}{dt} - 0$

$-6 = 3(8+2(1))^2 (2) \frac{dx}{dt}$

$-6 = 600 \frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{-6}{600} = \frac{-1}{100} = -0.01 \text{ cm/s}$

2011-2014 / 15 / خارج النظر

2
الاحيائي
التطبيقي
تطبيقات التفاضل

مبرهنة رول

أولاً: الدالة كثيرة الحدود، هي الدالة التي لا تحتوي على كسر (لا يوجد x بالقام) والجذر (لا يوجد x داخل الجذر) والأسس موجبة.

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow \text{كثيرة الحدود}$$

$$f(x) = x^3 - x \Rightarrow \text{كثيرة الحدود}$$

$$f(x) = x^3 - x^{-1} \Rightarrow \text{غير كثيرة الحدود} \Rightarrow f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$$

(دالة نسبية)

خطوات الحل للدالة كثيرة الحدود

أولاً: الاستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a, b]$ لأنها كثيرة الحدود.
 ثانياً: قابلية الاشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على المفتوحة (a, b) لأنها كثيرة الحدود.
 ثالثاً: تعويض: نعوض طرفي الفترة $[a, b]$ بالدالة الأصلية.

$$f(a) = f(b)$$

خطوات ما بعد التحقق

- 1 نشق الدالة $\bar{f}(x)$
- 2 نعوض بدل كل x بـ c $\bar{f}(c)$
- 3 نساوي المشتقة للصفر $\bar{f}'(c) = 0$ ونجد c

ex: مغلقة $[-3, 3]$ عناصرها $\Rightarrow \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

ex: مفتوحة $(-3, 3)$ عناصرها $\Rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

تنبيه

إن تحققت الشروط جميعها يوجد على الأقل قيمة واحدة لـ c تنتمي للفترة المفتوحة.

سؤال 2 بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة $f(x) = x^2 - 3x$ للفترة $[-1, 4]$ وان تحقق جد قيم C

الحل

أولاً، الدالة مستمرة، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 4]$ لأنها كثيرة الحدود.

ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 4)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً، نعوض طرفي في الفترة $[-1, 4]$ في الدالة.

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$$f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$$

$$f(b) = f(4) = (4)^2 - 3(4) = 16 - 12 = 4$$

$$\therefore f(a) = f(b)$$

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$$\bar{f}(x) = 2x - 3$$

$$\bar{f}(c) = 2c - 3 \Rightarrow 2c - 3 = 0$$

$$\Rightarrow [2c = 3] + 2 \quad \text{تمهيد/تطبيقي 2017}$$

$$c = \frac{3}{2} = 1.5 \in (-1, 4)$$

سؤال 1 بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة:

$f(x) = x^3 - 9x$ للفترة $[-3, 3]$ وان تحقق جد قيم C

أولاً، الدالة مستمرة هي الفترة المغلقة $[-3, 3]$ لأنها كثيرة الحدود.

ثانياً، الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(-3, 3)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً، نعوض طرفي في الفترة $[-3, 3]$ في الدالة.

$$f(x) = x^3 - 9x$$

$$f(a) = f(-3) = (-3)^3 - 9(-3) = -27 + 27 = 0$$

$$f(b) = f(3) = (3)^3 - 9(3) = -27 - 27 = 0$$

$\therefore f(a) = f(b)$ تحقق شروط مبرهنة رول

$$f(x) = x^3 - 9x$$

$$\bar{f}(x) = 3x^2 - 9$$

$$\bar{f}(c) = 3c^2 - 9$$

$$3c^2 - 9 = 0$$

$$[3c^2 = 9] \div 3$$

$$c^2 = 3 \quad \text{بالجذر التربيعي}$$

$$c = \pm \sqrt{3} \in (-3, 3)$$

بالسؤال
دالة مستمرة
على الفترة المغلقة
بالجواب
مشتقة الدالة
(مشتقة كثيرة الحدود)

سؤال 3

بين هل تنطبق شروط مبرهنة

رول على الدالة $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$ للفترة $[-1, 1]$ وانت تحققت جد قيم C

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لأنها كثيرة الحدود.

ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً، نعوض طرفي الفترة $[-1, 1]$ في الدالة.

2013 / خ $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

$$f(a) = f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3 = -9 + 3 + 1 = -5$$

$$f(b) = f(1) = 9(1) + 3(1)^2 - (1)^3 = 9 + 3 - 1 = 11$$

$$\therefore f(a) \neq f(b)$$

\therefore لا تتحقق شروط مبرهنة رول لعدم تحقق الشرط الثالث.

وما طربك لها رأيتك بدعة
لقد كنت أرجو أن أراك فأطرب
وتعدل فيك القوافي وهمتي
كأنني بمدح قبل مدحك مدني

سؤال 4

بين هل تنطبق شروط مبرهنة

رول على الدالة $f(x) = (x^2 - 3)^2$ للفترة $[-1, 1]$ وانت تحققت جد قيم C

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لأنها كثيرة الحدود.

ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً، نعوض طرفي الدالة $[-1, 1]$ في الدالة.

$$f(x) = (x^2 - 3)^2$$

$$f(a) = f(-1) = ((-1)^2 - 3)^2 = (1 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$f(b) = f(1) = (1^2 - 3)^2 = (1 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$$

\therefore تتحقق شروط مبرهنة رول.

$$f(a) = f(b)$$

$$f(x) = (x^2 - 3)^2$$

$$\bar{f}(x) = 2(x^2 - 3) \cdot (2x)$$

$$\bar{f}(x) = 4x(x^2 - 3)$$

$$\bar{f}(c) = 4c(c^2 - 3)$$

$$4c(c^2 - 3) = 0$$

$$\text{أما } [4c = 0] \div 4$$

$$c = 0 \in (-1, 1)$$

$$\text{بالجذر } c^2 - 3 = 0 \Rightarrow c^2 = 3$$

$$c = \pm \sqrt{3} \notin (-1, 1)$$



سؤال 6 جد قيمة c التي تعينها مبرهنة

رول للدالة $f(x) = (x-1)^4$ ، $[-1, 3]$

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 3]$ لأنها كثيرة الحدود.

ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 3)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً،

$$f(x) = (x-1)^4$$

$$f(a) = f(-1) = (-1-1)^4 = (-2)^4 = 16$$

$$f(b) = f(3) = (3-1)^4 = (2)^4 = 16$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\bar{f}(x) = 4(x-1)^3(1)$$

$$\bar{f}(c) = 4(c-1)^3$$

$$[4(c-1)^3 = 0] \div 4$$

$$(c-1)^3 = 0 \quad \text{بالجذر التكعيبي}$$

$$c-1=0 \Rightarrow c=1 \in (-1, 3)$$

2 د / 2011

2018 - د (2) / تطبيقي / خارج القطر

سؤال 5 جد قيمة c التي تعينها مبرهنة

رول للدالة $h(x) = x^3 - x$ ، $[-1, 1]$

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لأنها كثيرة الحدود.

ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً،

$$h(x) = x^3 - x$$

$$h(a) = h(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0$$

$$h(b) = h(1) = (1)^3 - 1 = 0$$

$$h(a) = h(b)$$

$$\bar{h}(x) = 3x^2 - 1$$

$$\bar{h}(c) = 3c^2 - 1$$

$$3c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3}$$

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, 1)$$

1 د / 2012

2016 - د (2) / خارج القطر

سؤال 7  بين هل ان مبرهنة رول تحقق قيمة C الممكنة

$$f(x) = (2-x)^2, \quad x \in [0, 4]$$

الحل

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0, 4]$ لأنها كثيرة الحدود.
ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, 4)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً،

$$\left. \begin{aligned} f(a) &= f(0) = (2-0)^2 = 4 \\ f(b) &= f(4) = (2-4)^2 = 4 \end{aligned} \right\} f(a) = f(b)$$

2015 / تمهيد

$$\bar{f}(x) = 2(2-x)(-1) \Rightarrow \bar{f}(c) = -2(2-c)$$

2017 - د (2) / تطبيقي / موصل

$$[-2(2-c) = 0] \div -2$$

$$2-c=0 \Rightarrow c=2 \in (0, 4)$$

سؤال 8  بين هل ان مبرهنة رول تحقق للدالة

$$f(x) = k, \quad [a, b]$$

الحل

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ لأنها ثابتة.
ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) .

$$f(a) = f(b) = k$$

الدالة تحقق مبرهنة رول وقيمة C ضمن (a, b)

ثانياً، الدالة الشطرية:

سؤال 1

بين هل تنطبق شروط ميرهندة

رول على الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \forall x \geq 0 \\ -3x^2 - 4x & \forall x < 0 \end{cases} \quad [-2, 2]$$

وأتتحقق من جد قيم c

نولاً، الاستمرارية:

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = -3x^2 - 4x$$

مستمرة لأنها كثيرة الحدود

$$x = 0$$

$$f(0) = (0)^2 - 4(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0)^2 - 4(0) = 0 = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -3(0)^2 - 4(0) = 0 = L_2$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2, 2]$

ثانياً، قابلية الاشتقاق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \forall x \geq 0 \\ -3x^2 - 4x & \forall x < 0 \end{cases}$$

ستداع اشتقاق نحذف $f = 1$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x > 0 \\ -6x - 4 & x < 0 \end{cases}$$

$$\bar{f}(0) = \begin{cases} 2(0) - 4 = -4 \\ -6(0) - 4 = -4 \end{cases}$$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-2, 2)$

ثالثاً، نعوض طرفي الفترة $[-2, 2]$ في الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 0 \\ -3x^2 - 4x & x < 0 \end{cases}$$

$$f(a) = f(-2) = -3(-2)^2 - 4(-2) = -12 + 8 = -4$$

$$f(b) = f(2) = (2)^2 - 4(2) = 4 - 8 = -4$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 2x - 4 \\ -6x - 4 \end{cases} \Rightarrow \bar{f}(c) = \begin{cases} 2c - 4 \\ -6c - 4 \end{cases}$$

$$2c - 4 = 0 \Rightarrow [2c = 4] \div 2$$

$$c = 2 \notin (-2, 2)$$

$$-6c - 4 = 0 \Rightarrow [-6c = 4] \div -6$$

$$c = \frac{-2}{3} \in (-2, 2)$$

قيمة a نعوضها
"بالصغر"
قيمة b نعوضها
"بالأكبر"

سؤال 2: بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \in [-1, 2] \\ -1 & x \in [-4, -1) \end{cases}$$

الحل

لا، الاستمرارية، مستمرة لأنها كثيرة الحدود

مستمرة لأنها كثيرة الحدود

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = (-1)^2 + 1 = 2 \quad L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -1 \quad L_2$$

لا توجد نهاية: غير مستمرة عند $[-4, 2]$

∴ لا تتحقق شروط مبرهنة رول لعدم تحقق الشرط الثالث.

لايجاد مجهول في المعادلة الشطرنج:

تحققا الدالة الشطرنج مبرهنة رول:

① من الاستمرارية نستخرج معادلة

① الاستمرارية قلنا $L_1 = L_2$

② من قابلية الاشتقاق نستخرج معادلة

② قابلية الاشتقاق $\bar{f}(x) = \bar{f}(x)$ الجوة

③ من $F_a = F_b$ نستخرج قيمة احد المجهولين

③ نعوها $[a, b]$ بدالة $F_a = F_b$

④ نحل المعادلة بالحدف

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر التواصل الاجتماعي او اي ص مستنسخة وبيعها او عن اي ص وقانوني (وغير مبرر الذمة) كل على علامة تجارية من وزارة الص هذا التجاوز لان ملازمتنا مسجلة بم العراقي المرقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) واحالته الى السلطات القانونية وفي

توزيع هام جدا

الأحيائي والتطبيقي

2

تطبيقات

ثالثاً، الدالة النسبية، هي الدالة التي تحوي x بالمقام مثل :

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}, f(x) = \frac{1}{x} + x$$

قابلية الاشتقاق

الاستمرارية

1 نشتق الدالة.

1 نأخذ مقام الدالة ونساويه للصفر

ونجد قيم x .

2 نأخذ مقام الدالة ونساويه للصفر ونجد x

2 إذا كان $x \in [a, b]$ غير مستمرة

3 إذا كان $x \notin (a, b)$ غير قابلة للاشتقاق

$x \in [a, b]$ مستمرة

ثالثاً، نعوض طرفي الفترة $[\frac{1}{2}, 2]$ بالدالة

$$f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 + 4 = 5$$

$$f(b) = f(2) = 2(2) + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\bar{f}(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$$

$$\bar{f}(c) = 2 - \frac{2}{c^2} \Rightarrow 2 - \frac{2}{c^2} = 0$$

$$2c^2 - 2 = 0 \Rightarrow c^2 = 1$$

$$c = \pm 1$$

$$c = -1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$c = 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

سؤال 1 بين هل تنطبق شروط مبرهنة

$$f(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

حول على الدالة حيث $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ ثم جد قيم c

أولاً، الاستمرارية، $x = 0 \notin [\frac{1}{2}, 2]$

$$f(k) = 2k + \frac{2}{k}$$

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = 2k + \frac{2}{k}$$

الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[\frac{1}{2}, 2]$ ثانياً، قابلية الاشتقاق،

$$f(x) = 2x + 2x^{-1}$$

$$\bar{f}(x) = 2 + (-2x^{-2}) \Rightarrow \bar{f}(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

∴ قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

نعوض طرفي الفترة $[-1, 1]$ بالدالة

$$f(a) = f(-1) = \frac{3}{(-1)^2 - 4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$f(b) = f(1) = \frac{3}{(1)^2 - 4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$\bar{f}(c) = \frac{-6c}{(c^2 - 4)^2}$$

$$\frac{-6c}{(c^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow -6c = 0$$

نظرية فيفا الوسطية

$$c = 0 \in (-1, 1)$$

وَمَكَثْتُ حِينَ لِقَائِهِ مُتَسَائِلًا

هَلْ يَفِدُّ الشَّعْرَاءَ وَصَفَّ كَمَالِهِ؟

سَبَحَانَ مَنْ سَوَى الْجَمَالَ يُوْجِهُهُ

وَتَقَاسَمَ الْبَاقُونَ ثُلُثَ جَمَالِهِ

سؤال 2: بين هل نطبق شروط مبرهنة

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 4} \quad \text{دول على الدالة}$$

حيث $x \in [-1, 1]$

$$x^2 - 4 = 0$$

أولاً، الاستمرارية،

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$x = \pm 2 \notin [-1, 1]$$

$$f(k) = \frac{3}{k^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \frac{3}{k^2 - 4}$$

يمكن الاستغناء عنها

$$f(k) = \lim_{x \rightarrow k} f(x)$$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$

ثانياً، قابلية الاشتقاق،

$$\bar{f}(x) = \frac{(x^2 - 4)(0) - 3(2x)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$(x^2 - 4)^2 = 0 \quad \text{بالجذر}$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \notin (-1, 1)$$

∴ قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$

رابعاً، الدالة التي تحتوي

ملاحظة $\cos x$, $\sin x$ مسنبرة وقابلة للاشتقاق كما تعلمنا في الصف الخامس

سؤال

بين هل نطبق شروط مبرهنة رول على الدالة

$$f(x) = \cos 2x + 2 \cos x, [0, 2\pi]$$

أولاً، الاستمرارية: الدالة مسنبرة على الفترة المغلقة $[0, 2\pi]$

ثانياً، قابلية الاشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, 2\pi)$

ثالثاً،

$$f(x) = \cos 2x + 2 \cos x$$

$$f(a) = f(0) = \cos 0 + 2 \cos 0 = 1 + 2 = 3$$

$$f(b) = f(2\pi) = \cos 4\pi + 2 \cos 2\pi = 1 + 2 = 3$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\bar{f}(x) = (-\sin 2x) \cdot 2 + 2(-\sin x)$$

$$\bar{f}(x) = -2 \sin 2x - 2 \sin x$$

$$\bar{f}(c) = -2 \sin 2c - 2 \sin c$$

$$[-2 \sin 2c - 2 \sin c = 0] \div -2$$

$$\sin 2c + \sin c = 0$$

قانون نصف الزاوية

$$2 \sin c \cdot \cos c + \sin c = 0$$

$$\sin c (2 \cos c + 1) = 0$$

$$\sin c = 0 \begin{cases} c = 0 \notin (0, 2\pi) \\ c = \pi \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

$$\text{أو } 2 \cos c + 1 = 0 \Rightarrow \cos c = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{\pi}{3} = \text{زاوية الاسناد}$$

أولاً، الربع الثاني،

$$c = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{3} \in (0, 2\pi)$$

توحيد مقامات

ثانياً، الربع الثالث،

$$c = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow c = \frac{4\pi}{3} \in (0, 2\pi)$$

توحيد مقامات

2018 - د (1) / تطبيقي

الأحيائي التطبيقي تطبيقات التفاضل

دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1, b]$ $f(x) = ax^2 - 4x + 5$

فإذا كانت $c = 2$ ، $c \in (-1, b)$ فجد قيمتي $a, b \in \mathbb{R}$



خطوات الحل

$$f'(x) = 2ax - 4$$

$$f'(c) = 2ac - 4$$

$$2ac - 4 = 0$$

$$2a(2) - 4 = 0 \Rightarrow 4a - 4 = 0$$

$$4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

تعويض

$$f(x) = ax^2 - 4x + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 5$$

عناصر
الفترة

$$f(a) = f(b)$$

$$f(-1) = f(b)$$

$$(-1)^2 - 4(-1) + 5 = b^2 - 4b + 5$$

$$1 + 4 = b^2 - 4b \Rightarrow b^2 - 4b - 5 = 0$$

$$(b-5)(b+1) = 0$$

$$b - 5 = 0 \Rightarrow b = 5$$

$$b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

يُهل

1 نشتق الدالة ونعوض بدل كل x بـ c

2 نساوي المشتقة للصفر ونعوض c

2018 - د (2) / تطبيقي

3 لإيجاد المجهول الموجود في الفترة نستخدم الشرط الثالث لمبرهنة رول $f(a) = f(b)$ ثم نعوض طرفي الفترة ونصبح لدينا معادلة ونجد منها المجهول.

نحصل على
المعادلة المثلثية
بعد الاشتقاق
المساواة $0 = 0$

خطوات حل المعادلة المثلثية :

① تساوي زوايا المعادلة

② نفكر بالتحليل تجريبية
ما هو مشترك

③ نجعل المعادلة ذات صنف واحد

21 Sin X كلها

21 Cos X كلها



مبرهنة القيمة المتوسطة

أولاً، الدوال كثيرات الحدود

شروطها وخطوات الحل (علماً أن هذه الخطوات ثابتة لجميع أنواع الدوال).

الشروط

ملاحظة

الاستمرارية وقابلية الاشتقاق كما
تعلمناها في مبرهنة رول.

1 الاستمرارية.

2 قابلية الاشتقاق.

خطوات ما بعد تحقق الشروط

1 نعوض طرفي الفترة المغلقة $[a, b]$ بالدالة ونجد $f(a)$, $f(b)$.

لا يشترط تساوي الطرفين
 $f(a)$, $f(b)$

2 نشتق الدالة $f'(x)$

3 نعوض بدل كل x بـ c ونجد $f'(c)$

4 نطبق القانون:
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

قبل أن تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق التواصل الاجتماعي أو ايصالها باليوبيل أو اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها أو نشر مستنسخة وبيعها أو عن أي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل أو غيره لكون فيها اشكالاً وقانوني (وغير مبرر الذمة) كل من يقوم بهذه الأفعال، علماً أن ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتؤكد وأحذر أن هناك هذا التجاوز لأن ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موحدة العراقي المرقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل بمرقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتوج واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى يعق المخالف. لذا اقتضى التنويه

تجارتهم جداً

الأحيائي
والتطبيقي

2

تطبيقات التفاضل

50

ملازم دار المغرب

سؤال 2 اختبر امكانية تطبيق

مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة
وان $f(x) = x^2 - 6x + 4$, $[-1, 7]$
تحقق جد قيم C.

الحل

أولاً، الاستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة
المغلقة $[-1, 7]$ لانها كثيرة الحدود.
ثانياً، قابلية الاشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق
على الفترة المفتوحة $(-1, 7)$ لانها كثيرة
الحدود.
نعوض طرفي الفترة $[-1, 7]$ بالدالة.

$$f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 6(-1) + 4$$

$$= 1 + 6 + 4 = 11$$

$$f(b) = f(7) = (7)^2 - 6(7) + 4$$

$$= 49 - 42 + 4 = 11$$

$$\bar{f}(x) = 2x - 6$$

$$\bar{f}(c) = 2c - 6$$

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2c - 6 = \frac{11 - 11}{7 - (-1)}$$

$$2c - 6 = 0$$

$$[2c = 6] + 2$$

$$c = 3 \in (-1, 7)$$

(1) د - 2015

2019 - د (2) / تطبيقي

2019 - د (3) / تطبيقي

سؤال 1 اختبر امكانية تطبيق

مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة
وان $f(x) = x^3 - x - 1$, $[-1, 2]$
تحقق جد قيم C الممكنة.

الحل

أولاً، الاستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة
المغلقة $[-1, 2]$ لانها كثيرة الحدود.
ثانياً، قابلية الاشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق
على الفترة المفتوحة $(-1, 2)$ لانها كثيرة
الحدود.
نعوض طرفي الفترة $[-1, 2]$ بالدالة.

$$f(a) = f(-1) = (-1)^3 - (-1) - 1$$

$$= -1 + 1 - 1 = -1$$

$$f(b) = f(2) = (2)^3 - (2) - 1$$

$$= 8 - 2 - 1 = 5$$

$$\bar{f}(x) = 3x^2 - 1$$

$$\bar{f}(c) = 3c^2 - 1$$

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$3c^2 - 1 = \frac{5 - (-1)}{2 - (-1)}$$

$$3c^2 - 1 = \frac{6}{3}$$

$$3c^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3c^2 = 2 + 1$$

$$[3c^2 = 3] + 3 \Rightarrow c^2 = 1$$

$$c = \pm 1 \text{ بالجزء}$$

$$c = 1 \in (-1, 2)$$

$$c = -1 \notin (-1, 2)$$

سؤال 3

أختبر إمكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x) = x^2 - 4x + 5$ $[-1, 5]$ وأن تحققت جد قيم c الممكنة.

الحل

أولاً: الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 5]$ لأنها كثيرة الحدود.
ثانياً: قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 5)$ لأنها كثيرة الحدود.

نحوض طرفي الفترة $[-1, 5]$ بالدالة.
a b

$$f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 5$$

$$= 1 + 4 + 5 = 10$$

2016 - د (3) / خارج

$$f(b) = f(5) = (5)^2 - 4(5) + 5$$

$$= 25 - 20 + 5 = 10$$

$$\bar{f}(x) = 2x - 4$$

$$\bar{f}(c) = 2c - 4$$

$$f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2c - 4 = \frac{10 - 10}{5 - (-1)}$$

$$2c - 4 = 0$$

$$[2c = 4] \div 2 \Rightarrow c = 2 \in (-1, 5)$$

ما أجملك ! الليل أصبح راحباً يتأملك
كم رؤى ألقت حدودك..
كم ربيعاً غماز لك؟
والبحر يمتد كأنك كوكب
والكون؟.. كل الكون فز ليحملك

ثانياً: الدوال النسبية

* نثبت الاستمرارية وقابلية الاشتقاق للدالة النسبية كما تعلمناها في مبرهنة رول ثم تكمل الباقي الخطوات كما هي.

سؤال 4 هل نطبق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x) = \frac{4}{x+2}$ $x \in [-1, 2]$ ثم جد قيم c ان تحققت الشروط.

$$f(x) = \frac{4}{x+2}$$

$$f(a) = f(-1) = \frac{4}{-1+2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$f(b) = f(2) = \frac{4}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\bar{f}(c) = \frac{-4}{(c+2)^2}$$

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{-4}{(c+2)^2} = \frac{1-4}{2-(-1)}$$

$$\frac{-4}{(c+2)^2} = \frac{-3}{3}$$

$$-3(c+2)^2 = -12 \quad [\div -3]$$

$$(c+2)^2 = 4 \quad \text{بالجذر}$$

$$c+2 = \pm 2$$

$$\text{أ) } c+2=2 \Rightarrow c=0 \in (-1, 2)$$

$$\text{ب) } c+2=-2 \Rightarrow c=-4 \notin (-1, 2)$$

2019 - تمهيد / احياني

الحل أولاً: الاستمرارية، $x+2=0$

$$x = -2 \notin [-1, 2]$$

$$f(x) = \frac{4}{x+2}, \quad k \in [-1, 2]$$

$$f(k) = \frac{4}{k+2} \quad \text{الصورة}$$

يمكن الاستغناء عن هذه الخطوات

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{4}{x+2} = \frac{4}{k+2} \quad \text{الغاية}$$

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k) \quad \text{الصورة = الغاية}$$

\therefore الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 2]$

$$\bar{f}(x) = \frac{(x+2)^0(0) - 4(1)}{(x+2)^2} \quad \text{ثانياً،}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-4}{(x+2)^2}$$

$$(x+2)^2 = 0 \quad \text{بالجذر}$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \notin (-1, 2)$$

\therefore الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 2)$



ملاحظة

إذا كانت الدالة بشكل جذر دليل فردي

أولاً، الدالة مستمرة لأن مجالها R .

ثانياً، قابلية الاشتقاق:

- (1) نشتق الدالة $\bar{f}(x)$
- (2) إذا أصبحت الدالة بعد الاشتقاق نسبية (x) بالمقام نأخذ المقام ونساويه للصفر ونجد x
- (3) إذا $x \in (a, b)$ فالدالة غير قابلة للاشتقاق ويتوقف الحل، أما إذا $x \notin (a, b)$ فاذن الدالة قابلة للاشتقاق ونكمل الحل.

سؤال 5 بين هل تنطبق مبرهنة القيبة المتوسطة على الدالة $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ ، $[-2, 7]$

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2, 7]$ لأن مجالها R .

ثانياً، قابلية الاشتقاق،

$$f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{3} (x+1)^{-\frac{1}{3}} \quad (1)$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

$$[3\sqrt[3]{x+1} = 0] \div 3$$

$$\sqrt[3]{x+1} = 0 \quad \text{بالتكعيب}$$

$$x+1=0$$

$$x=-1 \in (-2, 7)$$

غير قابلة للاشتقاق / لا تنطبق شروط مبرهنة القيبة المتوسطة.

مالا مني فيك احبابي واعدائي
إلا لفقلتهم عن عظم بلواني
تركيت للناس دنياهم ودينهم
شغلاً بحيك يا ديني ودنياي

تحذير هام جداً

أن مطبعة الغرب (ملازم دار المغرب) هي دار مشبته لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من طباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على ط القانون العراقي المرقم ٢٦ لسنة ١٩٥٧ والم ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات الم وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستم الاتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وهاشونا استم المزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه

سؤال 6 بين هل تنطبق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)^2}$ ثم جد قيم c الممكنة. $[-3, 5]$

الحل

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-3, 5]$ لأن مجالها R .

ثانياً، قابلية الاشتقاق،

$$f(x) = (x+3)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} (x+3)^{-\frac{1}{3}} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x+3}}$$

$$[3 \sqrt[3]{x+3} = 0] \div 3$$

$$\sqrt[3]{x+3} = 0 \quad \text{بالتكعيب}$$

$$x+3 = 0$$

$$x = -3 \notin (-3, 5)$$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-3, 5)$.

نعوض طرفي الفترة $[-3, 5]$ بالدالة.

$$f(a) = f(-3) = \sqrt[3]{(-3+3)^2} = 0$$

$$f(b) = f(5) = \sqrt[3]{(5+3)^2} = 4$$

$$f'(c) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{c+3}}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{2}{3 \sqrt[3]{c+3}} = \frac{4 - 0}{5 - (-3)}$$

$$\frac{2}{3 \sqrt[3]{c+3}} = \frac{4}{8}$$

$$[3 \sqrt[3]{c+3} = 4] \div 3$$

$$\sqrt[3]{c+3} = \frac{4}{3} \quad \text{بالتكعيب}$$

$$c+3 = \frac{64}{27} \Rightarrow c = \frac{64}{27} - 3$$

$$c = \frac{64 - 81}{27} = \frac{-17}{27}$$

$$\therefore c = \frac{-17}{27} \in (-3, 5)$$

أما القواد فحسبك أنت ساكنة
وصاحب البيت أدرك بالدي فيه

سؤال 7 بين هل تنطبق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ ، $x \in [-4, 0]$ وان تحققت جد قيم C .

∴ الدالة قابلة للاشتقاق لانها محتواة كلياً في مجال مشتقة f

$$f(a) = f(-4) = \sqrt{25-16} = 3$$

$$f(b) = f(0) = \sqrt{25-0} = 5$$

$$f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}} = \frac{5-3}{0-(-4)}$$

$$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}} \times \frac{1}{2}$$

$$-2c = \sqrt{25-c^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$4c^2 = 25 - c^2$$

$$5c^2 = 25 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c = \pm \sqrt{5}$$

$$\therefore c = +\sqrt{5} \notin (-4, 0)$$

$$c = -\sqrt{5} \in (-4, 0)$$

الحل

$$25 - x^2 \geq 0$$

بالجذر

$$25 \geq x^2$$

أولاً، الاستمرارية،

$$\pm 5 \geq x \quad [-5, 5]$$



$$f(k) = \sqrt{25-k^2}, \quad k \in [-4, 0]$$

$$\lim_{x \rightarrow k} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-k^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-16} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-0} = 5$$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-4, 0]$

ثانياً، قابلية الاشتقاق،

$$f(x) = (25-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (25-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x)$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$\sqrt{25-x^2} = 0 \quad \text{بالتربيع}$$

$$25 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$\therefore x = \pm 5 \notin (-4, 0)$$

نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة
(التقريب)

خطوات الحل

أولاً: نجد الدالة $f(x)$ وذلك بوضع x مكان المقدار المعقد .

ثانياً: نشتق الدالة $\bar{f}(x)$

ثالثاً: نجد قيم

$b =$ القيمة المعقدة

$a =$ أقرب قيمة منطقية للمقدار المعقد

$$h = b - a$$

$f(a)$ بالدالة

$\bar{f}(a)$ بالاشتقاق

رابعاً: نعوض a

خامساً: نستخدم القانون الآتي: $f(a+h) \simeq f(a) + h \bar{f}(a)$

جدول يوضح كيفية تحديد a, b وتقريب المقدار المعقد

المقدار	b	a
$\sqrt{26}$	26	25
$\sqrt[3]{-9}$	-9	-8
$(2.001)^5$	2.001	2
$(0.99)^{\frac{1}{2}}$	0.99	1
$\sqrt[5]{1.002}$	1.002	1
$\frac{1}{1002}$	1002	1000

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة

سؤال 2

المتوسطة جد تقريباً $\sqrt[3]{7.8}$

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3 x^{\frac{2}{3}}}$

المشتقة $f'(x) = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$

$b = 7.8$

$a = 8$

$h = b - a \Rightarrow h = 7.8 - 8 \Rightarrow h = -0.2$

$f(a) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$

$f'(a) = f'(8) = \frac{1}{3 \sqrt[3]{(8)^2}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{64}}$

$= \frac{1}{3(4)} = \frac{1}{12} = 0.083$

$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a)$
 $\simeq 2 + (-0.2 \cdot 0.083)$
 $\simeq 2 - 0.0166$
 $\simeq 1.9834$

الحل

باستخدام نتيجة مبرهنة

سؤال 1

القيمة المتوسطة جد $\sqrt{26}$

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2 x^{\frac{1}{2}}}$

المشتقة $f'(x) = \frac{1}{2 \sqrt{x}}$

$b = 26$

$a = 25$

$h = b - a$

$h = 26 - 25$

$h = 1$

$f(a) = f(25) = \sqrt{25} = 5$

$f'(a) = f'(25) = \frac{1}{2 \sqrt{25}} = \frac{1}{10} = 0.1$

$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a)$
 $\simeq 5 + (1 \cdot 0.1)$
 $\simeq 5 + 0.1$
 $\simeq 5.1$

الحل

باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

سؤال 4

جد $\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

الدالة

الحل

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

المشتقة

$$b = 63, a = 64$$

$$h = b - a \Rightarrow h = 63 - 64 \Rightarrow h = -1$$

$$f(a) = f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} = 8 + 4 = 12$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(a) = f'(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}$$

$$f'(a) = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} \quad \text{توحيد مقامات}$$

$$f'(a) = \frac{3+1}{48} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12} = 0.083$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &\simeq f(a) + h \cdot f'(a) \\ &\simeq 12 + (-1 \cdot 0.083) \\ &\simeq 12 - 0.083 \\ &\simeq 11.917 \end{aligned}$$

جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة المقدار $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

سؤال 5

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

الدالة

الحل

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \quad \text{المشتقة}$$

$$b = 9$$

$$a = 8$$

$$h = b - a \Rightarrow h = 9 - 8 \Rightarrow h = 1$$

$$f(a) = f(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= f'(8) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(8)^4}} = -\frac{1}{3(2)^4} \\ &= -\frac{1}{48} = -0.0208 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &\simeq f(a) + h \cdot f'(a) \\ &\simeq 0.5 + (1 \cdot -0.02) \\ &\simeq 0.5 - 0.02 \\ &\simeq 0.48 \end{aligned}$$

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد $(1.04)^3 + 3(1.04)^4$

سؤال 6

الحل

الدالة $f(x) = x^3 + 3x^4$
المشتقة $f'(x) = 3x^2 + 12x^3$

$b = 1.04$, $a = 1$
 $h = b - a \Rightarrow h = 0.04$

$f(a) = f(1) = (1)^3 + 3(1)^4$
 $= 1 + 3 = 4$

$f'(a) = f'(1) = 3(1)^2 + 12(1)^3$
 $= 3 + 12 = 15$

$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a)$
 $\simeq 4 + (0.04 \cdot 15)$
 $\simeq 4.6$

إشرب على وجه الحبيب المقبل
وعلى الفم المتبسّم المتقبل
أكرم بأخو من يليت بجه
لا خير في حب الحبيب الأول

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

سؤال 5

الحل

الدالة $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{x}}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{x}}$

المشتقة $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{x}}$

$b = 17$, $a = 16$

$h = b - a \Rightarrow h = 17 - 16 \Rightarrow h = 1$

$f(a) = f(16) = \sqrt{16} + \sqrt[4]{16}$
 $= 4 + 2 = 6$

$f'(a) = f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{(16)^3}}$
 $= \frac{1}{8} + \frac{1}{4(2)^3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$
 $= \frac{4+1}{32} = \frac{5}{32} = 0.156$

$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a)$
 $\simeq 6 + (1 \cdot 0.156)$
 $\simeq 6.156$

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد

سؤال 8

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

الدالة

$$f(x) = x^{-1}$$

تحويل

$$\bar{f}(x) = -1 x^{-2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-1}{x^2}$$

المشتقة

$$b = 101, a = 100$$

$$h = b - a \Rightarrow h = 101 - 100 \Rightarrow h = 1$$

$$f(a) = f(100) = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(100) = \frac{-1}{(100)^2} = \frac{-1}{10000} = -0.0001$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &\simeq f(a) + h \cdot \bar{f}(a) \\ &\simeq 0.01 + (1 \cdot -0.0001) \\ &\simeq 0.01 - 0.0001 \\ &\simeq 0.0099 \end{aligned}$$

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد

سؤال 7

$$\sqrt[3]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3} + x^4 + 3$$

الدالة

$$f(x) = x^3 + x^4 + 3$$

$$\bar{f}(x) = \frac{3}{5} x^2 + 4x^3$$

$$\bar{f}(x) = \frac{3}{5 \sqrt[3]{x^2}} + 4x^3$$

المشتقة

$$b = 0.98, a = 1$$

$$h = b - a \Rightarrow h = 0.98 - 1 \Rightarrow h = -0.02$$

$$\begin{aligned} f(a) &= f(1) = \sqrt[3]{(1)^3} + (1)^4 + 3 \\ &= 1 + 1 + 3 = 5 \end{aligned}$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(1) = \frac{3}{5 \sqrt[3]{(1)^2}} + 4(1)^3$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{4}{1}$$

$$= \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5} = 4.6$$

$$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot \bar{f}(a)$$

$$\simeq 5 + (-0.02 \cdot 4.6)$$

$$\simeq 5 - 0.092$$

$$\simeq 4.908$$



* في حالة وجود قسمة تحت جذر بشكل $0.\square\square\square$ نسوي المراتب لدليل الجذر بوضع اصفار (0) على اليمين.

عدد المراتب بعد الجذر ← مثلاً: $\sqrt[3]{0.12}$ ← ثلاث مراتب = دليل الجذر

عدد المراتب قبل الجذر = دليل الجذر

مثلاً: $\sqrt[5]{0.30000}$ ← خمس مراتب = دليل الجذر

سؤال 10 باستخدام نتيجة مبرهنة القسمة

المتوسطة جد $\sqrt{\frac{1}{2}}$

الدليل = المراتب → $\sqrt[3]{0.50}$

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

المشتقة

$b = 0.50$

$a = 0.49$

$h = b - a \Rightarrow h = 0.50 - 0.49$

$h = 0.01$

$f(a) = f(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$

$\bar{f}(a) = \bar{f}(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}}$

$= \frac{1}{2(0.7)} = \frac{10}{14}$

$= \frac{5}{7} = 0.714$

$f(a+h) \approx f(a) + h \cdot \bar{f}(a)$

$\approx 0.7 + (0.01 \cdot 0.714)$

$\approx 0.7 + 0.00714$

≈ 0.70714

سؤال 9 باستخدام نتيجة مبرهنة القسمة

المتوسطة جد $\sqrt[3]{0.12}$

الدليل = المراتب → $\sqrt[3]{0.120}$

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$b = 0.120$, $a = 0.125$

$h = b - a \Rightarrow h = 0.120 - 0.125$

$h = -0.005$

$f(a) = f(0.125) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$

$\bar{f}(a) = \bar{f}(0.125) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0.125)^2}}$

$= \frac{1}{3(0.5)^2} = \frac{1}{3(0.25)} = \frac{1}{0.75}$

$= \frac{100}{75} = \frac{4}{3} = 1.333$

$f(a+h) \approx f(a) + h \cdot \bar{f}(a)$

$\approx 0.5 + (-0.005 \cdot 1.333)$

≈ 0.49335

الأشكال الهندسية في مبرهنة القيمة المتوسطة

القسم الثاني

يطلب الحجم / يطلب المساحة

أولاً: نكتب قانون الحجم أو المساحة بحسب الشكل والمعطيات.
ثانياً: يصبح هذا القانون دالة إذا كان يحوي متغير واحد فقط مثل قانون حجم المكعب أو حجم الكرة أو مساحة الدائرة أو مساحة المربع ويمكنك مراجعة الأسئلة (2 ، 3 ، 4) ثم تكمل باقي خطوات التقريب.

ملاحظة

إذا كان قانون الحجم أو المساحة يحوي مجهولين (متغيرين) نجد علاقة بينهما أو يعطي أحدهما ليصبح القانون بهتغير واحد ويكون دالة (راجع السؤال 5).

القسم الأول

يعطي الحجم / يعطي المساحة

يطلب أحد الأبعاد
نصف القطر r
ارتفاع h
طول x

الخطوات

أولاً: نستخدم قانون الحجم أو المساحة بحسب الشكل والمعطيات

ثانياً: نعوض الحجم أو المساحة في القانون.

ثالثاً: نقوم بترتيب المعادلة بعد التعويض ثم نستخدم التقريب.

يمكن التاياني
الآتيح :- $\sqrt{\frac{1}{2}}$ بالصيغ

$$1 // \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$2 // \sqrt{(2)^{-1}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$3 // (\sqrt{2})^{-1} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}$$

سؤال 10

المُسند في الرياضيات

سؤال 2 مربع مساحته 48 cm^2 جد طول ضلعه بصورة تقريبية مستخدماً نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل

$$A = L^2$$

$$48 = L^2 \Rightarrow L = \sqrt{48} \quad (\text{تقريب})$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$b = 48$$

$$a = 49$$

$$h = b - a$$

$$h = -1$$

$$f(a) = f(49) = \sqrt{49} = 7$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(49) = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{14} = 0.071$$

$$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot \bar{f}(a)$$

$$\simeq 7 + (-1 \cdot 0.071)$$

$$\simeq 7 - 0.071$$

$$\simeq 6.929 \text{ cm}$$

سؤال 1 كرة حجمها $84\pi \text{ cm}^3$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية مستخدماً نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\left[84\pi = \frac{4}{3} \pi r^3 \right] \cdot 3$$

$$\left[84 \cdot 3 = 4 r^3 \right] \div 4 \Rightarrow r^3 = \frac{84 \cdot 3}{4}$$

$$r^3 = 63 \quad \text{بالجذر التكعيبي}$$

$$r = \sqrt[3]{63} \quad \text{تقريب}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{الدالة}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{البشتقة}$$

$$b = 63, \quad a = 64$$

$$h = b - a$$

$$h = -1$$

$$f(a) = f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(64) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}$$

$$= \frac{1}{3(4)^2} = \frac{1}{48} = 0.020$$

$$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot \bar{f}(a)$$

$$\simeq 4 + (-1 \cdot 0.020)$$

$$\simeq 4 - 0.02$$

$$\simeq 3.98 \text{ cm}$$

سؤال 4 كرة نصف قطرها 3.001 cm حجمها بصورة تقريبية مستخدماً نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{دالة}$$

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{الدالة}$$

$$\bar{V}(r) = 4 \pi r^2 \quad \text{المشتقة}$$

$$b = 3.001$$

$$a = 3$$

$$h = b - a \Rightarrow h = 0.001$$

$$\begin{aligned} V(a) &= V(3) = \frac{4}{3} \pi (3)^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi (27) = 36 \pi \end{aligned}$$

$$\bar{V}(a) = \bar{V}(3) = 4 \pi (3)^2 = 36 \pi$$

$$\begin{aligned} V(a+h) &\approx V(a) + h \cdot \bar{V}(a) \\ &\approx 36 \pi + (0.001 \cdot 36 \pi) \\ &\approx 36 \pi + 0.036 \pi \\ &\approx 36.036 \pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

سؤال 3 مكعب طول حرفه 9.98 cm حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

$$V = x^3$$

$$V(x) = x^3 \quad \text{الدالة}$$

$$\bar{V}(x) = 3x^2 \quad \text{المشتقة}$$

$$b = 9.98$$

$$a = 10, h = b - a$$

$$h = -0.02$$

$$V(a) = V(10) = (10)^3 = 1000$$

$$\bar{V}(a) = \bar{V}(10) = 3(10)^2 = 300$$

$$\begin{aligned} V(a+h) &\approx V(a) + h \cdot \bar{V}(a) \\ &\approx 1000 + (-0.02 \cdot 300) \\ &\approx 1000 - 6 \\ &\approx 994 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

لك اكتفيت فلم أعبأ بما انشغلوا
سيان بعدك من جاؤا ومن غابوا
أنت المسافر في قلبي وأوردتني
والكل بعدك في عيني أغراب

$$b = 2.98$$

$$a = 3$$

$$h = b - a$$

$$h = -0.02$$

$$V(a) = V(3) = \frac{\pi}{12} (3)^3$$

$$= \frac{\pi}{12} (27) = 2.25 \pi$$

$$\bar{V}(a) = \bar{V}(3) = \frac{\pi}{4} (3)^2 = 2.25 \pi$$

$$V(a+h) \cong V(a) + h \cdot \bar{V}(a)$$

$$\cong 2.25 \pi + (-0.02 \cdot 2.25 \pi)$$

$$\cong 2.25 - 0.0450 \pi$$

$$\cong 2.205 \pi \text{ cm}^3$$

سؤال 5 مخروط قائم ارتفاعه يساوي قطر

قاعدته فإذا كان ارتفاعه 2.98 cm جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

1 د / 2017

ارتفاعه يساوي طول قطره قاعدته

$$[2r = h] \div 2$$

فإن البعطي h نخلص من r

$$r = \frac{h}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{h^2}{4} \cdot h$$

يكتب أن يبقى
نقارن بين
المتغيرات

$$V = \frac{\pi}{12} h^3$$

$$V(h) = \frac{\pi}{12} h^3 \quad \text{الدالة}$$

$$\bar{V}(h) = \frac{\pi}{4} h^2 \quad \text{المشتقة}$$

التغير التقريبي للدالة

* لكي نعرف أن السؤال يخص التغير التقريبي يجب أن تكون لدينا دلائل، إذا كان لدينا مثلاً كرة معدنية واثينا لكي نطليها والطلاء فيه سمك فهل أن حجم الكرة سيبقى على وضعه الأصلي أم أنه سيتغير؟ نعم سيتغير ولكن التغير طفيف جداً لأن الطلاء سمكه قليل جداً إذن نصف القطر للكرة سوف يتغير تغيراً بسيطاً جداً هذا التغير فيسمى بـ (التغير التقريبي).

بالكرة والدائرة نزيد
من جانب واحد
بالعرج والمثلث نزيد
من جانبيت

$$\text{التغير التقريبي} \cong h \cdot \bar{f}(a)$$

* آخر قيمة التي استقر عليها الشكل الهندسي سواء كان بعد الطلاء أو بعد أي تغيير هو قيمة b وتكون دائماً قيمة معقدة. التغير بحدود اعشار

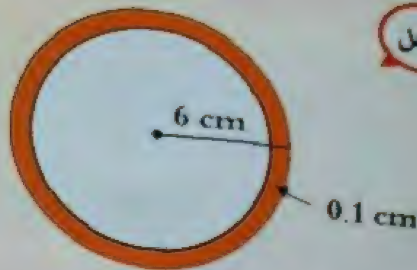
في مسائل الطلاء شتتعمل
قانون الحجم دائماً

التطبيقات التفاضل

الأحيائي
التطبيقي

2 ج

سؤال 2 كرة نصف قطرها 6 cm طليت بطلاء سميكة 0.1 cm جد كمية الطلاء بصورة تقريبية.



الحل

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

1 د / 2014

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{الدالة}$$

$$\bar{V}(r) = 4 \pi r^2 \quad \text{المشتقة}$$

$$b = 6.1$$

$$a = 6$$

$$h = b - a$$

$$h = 0.1$$

$$\bar{V}(a) = \bar{V}(6) = 4 \pi (6)^2$$

$$= 144 \pi$$

$$\text{حجم الطلاء} \cong h \cdot \bar{V}(a)$$

$$\cong 0.1 * 144 \pi$$

$$\cong 14.4 \pi \text{ cm}^3$$

كمية
الطلاء =

حجم الطلاء

سؤال 1 لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فإذا تغير x من 8 إلى 8.06 جد مقدار التغير التقريبي.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

أغمر القيمة
المعطاة

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}$$

$$b = 8.06$$

$$a = 8$$

1 د / 2013

$$h = b - a$$

2 د / 2017 إحيائي

$$h = 0.06$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(8) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{8}}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333$$

$$\text{التغير التقريبي} \cong h \cdot \bar{f}(a)$$

$$\cong 0.06 * 0.333$$

$$\cong 0.01998$$

إذا تغيرت x من 32 إلى 32.06 جد مقدار التغير التقريبي للدالة

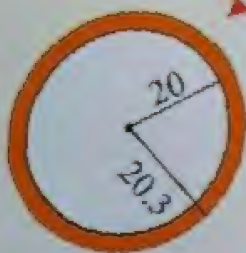
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

2 د / 2017 إحيائي

جد مساحة حلقة دائرية نصف قطرها الداخلي 20 cm ونصف قطرها الخارجي 20.3 cm باستخدام التفاضلات.

سؤال 4
2017

الحل



$$A = \pi r^2$$

$$f(r) = \pi r^2$$

الدالة

$$\bar{f}(r) = 2\pi r$$

المشتقة

$$b = 20.3$$

$$a = 20$$

$$h = b - a$$

$$h = 0.3$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(20) = 2\pi(20) = 40\pi$$

$$\begin{aligned} \text{مساحة الحلقة} &\cong h \cdot \bar{f}(a) \\ &\cong 0.3 \cdot 40\pi \\ &\cong 12\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

براد طلاء مكعب طول ضلعه 10 cm فإذا كان سمك الطلاء 0.15 cm جد حجم الطلاء بصورة تقريبية.

سؤال 3

الحل



$$V = x^3$$

$$V(x) = x^3$$

الدالة

$$\bar{V}(x) = 3x^2$$

المشتقة

$$b = 10.3$$

$$a = 10$$

$$h = b - a$$

$$h = 0.3$$

$$\bar{V}(a) = \bar{V}(10) = 3(10)^2 = 300$$

$$\begin{aligned} \text{حجم الطلاء} &\cong h \cdot \bar{V}(a) \\ &\cong 0.3 \cdot 300 \\ &\cong 90 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 0.15 + 0.15 + 10 \\ &= 0.30 + 10 \\ &= 10.30 = 10.3 \end{aligned}$$

أسئلة متفرقة

أولاً: إذا كانت أحد عناصر الفترة مجهولاً والدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

1. نعوض a, b بالدالة لنجد $f(a), f(b)$
2. نشتق الدالة ونعوض بدل x بـ c ثم نعوض في c ونجد $\bar{f}(c)$
3. نعوض كل من $f(a), f(b), \bar{f}(c)$ بالقانون $\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

سؤال 1 إذا كانت $f(x) = x^2 - 2x$ وكانت $f: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ ونحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = 5$ جد قيمة n

$$8 = \frac{n^2 - 2n - (0)}{n - 0}$$

$$8 = \frac{n(n-2)}{n} \Rightarrow 8 = n - 2$$

$$8 + 2 = n$$

$$n = 10$$

3 د / 2017

$$f(x) = x^2 - 2x, [0, n]$$

$$f(a) = f(0) = (0)^2 - 2(0) = 0$$

$$f(b) = f(n) = n^2 - 2n$$

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$\bar{f}(x) = 2x - 2$$

$$\bar{f}(c) = 2c - 2$$

$$\bar{f}(5) = 2(5) - 2 = 8$$

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ثانياً: إذا أعطى الدالة مباشرة بشكل $f(x)$ تبدأ بخطوة الاشتقاق مباشرة وب نفس باقي خطوات موضوع التقريب.

سؤال 2 إذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$ وكانت $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = \frac{2}{3}$ جد قيمة b

2014 / تمهيدي 2016 / 1 د 2017 / تمهيدي

سؤال 3 إذا كانت $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$$

$$\bar{f}(x) = 3x^2 + 6x + 4$$

$$b = 1.001, a = 1, h = 0.001$$

$$f(a) = f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 + 4(1) + 5 = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(1) = 3(1)^2 + 6(1) + 4 = 3 + 6 + 4 = 13$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &\cong f(a) + h \cdot \bar{f}(a) \\ &\cong 13 + (0.001 \cdot 13) \\ &\cong 13 + 0.013 \\ &\cong 13.013 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2$$

$$f(a) = f(0) = (0)^3 - 4(0)^2 = 0$$

$$f(b) = b^3 - 4b^2$$

$$\bar{f}(x) = 3x^2 - 8x$$

$$\bar{f}(c) = 3c^2 - 8c$$

$$\bar{f}\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{12}{9} - \frac{16}{3} = \frac{12 - 48}{9} = \frac{-36}{9} = -4$$

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$-4 = \frac{(b^3 - 4b^2) - (0)}{b - 0}$$

$$-4 = \frac{b(b^2 - 4b)}{b} \Rightarrow -4 = b^2 - 4b$$

$$b^2 - 4b + 4 = 0 \Rightarrow (b - 2)(b - 2) = 0$$

$$b = 2$$

سؤال 2

(a, b)

$[a, b]$

$a \neq b$

$a < b$

$a > b$

إذا كانت $f(x) = 4 - 2x - x^2$ جد نقاط النهايات التي وجدت له حدد مناطق التزايد والتناقص

سؤال 2

$$f(x) = 4 - 2x - x^2$$

الحل

$$\bar{f}(x) = -2 - 2x \quad \text{الفحص}$$

$$-2 - 2x = 0 \Rightarrow [-2 = 2x] \div 2$$

$$x = -1$$



$$f(x) = 4 - 2x - x^2$$

$$f(-1) = 4 - 2(-1) - (-1)^2$$

$$f(-1) = 4 + 2 - 1 = 5$$

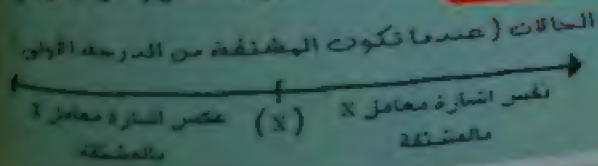
نقطة نهاية عظمى محلية $(-1, 5)$

$$\{x: x < -1\} \quad \text{مناطق التزايد}$$

$$\{x: x > -1\} \quad \text{مناطق التناقص}$$

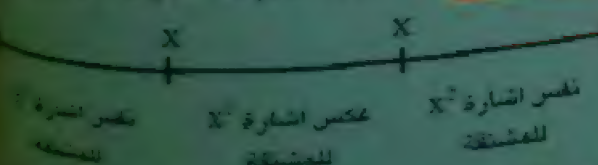
ملاحظة

ملاحظة نحن الفحص ولكن ليس في



ملاحظة

عندما تكون لدينا قيمتين



∴ الاطراف نفس الإشارة لـ x^2 والنصف عكس الإشارة لـ x^2 .

إذا كانت $f(x) = x^2$ جد نقاط النهايات التي وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص

سؤال 1

الحل

$$f(x) = x^2$$

$$\bar{f}(x) = 2x \quad \text{الفحص}$$

$$[2x = 0] \div 2 \Rightarrow x = 0$$



$$f(x) = x^2$$

$$f(0) = (0)^2 = 0$$

نقطة نهاية صغرى محلية $(0, 0)$

$$\{x: x > 0\} \quad \text{مناطق التزايد}$$

$$\{x: x < 0\} \quad \text{مناطق التناقص}$$

$$\bar{f}(1) = 2(1) = 2 \quad \text{التر من (0)}$$

$$\bar{f}(-1) = 2(-1) = -2 \quad \text{أصغر من (0)}$$

غير مطلوبة

بعد التعويض وأخذ الإشارة ووضعها على خط الأعداد.

تطبيقات التفاضل

إذا كانت $f(x) = 1 - (x-2)^2$ جد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

سؤال 4

الحل

$$f(x) = 1 - (x-2)^2$$

$$\bar{f}(x) = 0 - 2(x-2) \quad (1)$$

$$\bar{f}(x) = -2(x-2) \quad \text{الفحص}$$

$$[-2(x-2) = 0] \div -2 \Rightarrow x-2 = 0$$

$$x = 2$$



$$f(x) = 1 - (x-2)^2$$

$$f(2) = 1 - (2-2)^2$$

$$f(2) = 1 = 0$$

(2, 1) نقطة نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد: $\{x : x < 2\}$

مناطق التناقص: $\{x : x > 2\}$

$$\bar{f}(x) = -2(x-2)$$

$$\bar{f}(3) = -2(3-2) = -2 \quad \text{أصغر من (2)}$$

$$\bar{f}(1) = -2(1-2) = +2 \quad \text{أكبر من (2)}$$

غير مطلوبة وزارياً لنهايات الفحص فقط

إذا كانت $f(x) = 1 + (x-2)^2$ جد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

سؤال 3

الحل

$$f(x) = 1 + (x-2)^2$$

$$\bar{f}(x) = 0 + 2(x-2) \quad (1)$$

مطلوبة وزارياً للفحص

$$\bar{f}(x) = 2(x-2) \quad \text{الفحص}$$

$$[2(x-2) = 0] \div 2 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$



$$f(x) = 1 + (x-2)^2$$

$$f(2) = 1 + (2-2)^2$$

$$= 1 + 0 = 1$$

(2, 1) نقطة نهاية صغرى محلية

مناطق التزايد: $\{x : x > 2\}$

مناطق التناقص: $\{x : x < 2\}$

$$\bar{f}(x) = 2(x-2)$$

$$\bar{f}(3) = 2(3-2) = 2 \quad \text{أكبر من (2)}$$

$$\bar{f}(1) = 2(1-2) = -2 \quad \text{أصغر من (2)}$$

غير مطلوبة وزارياً لنهايات صحة الفحص فقط

سؤال 6 إذا كانت $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$ حدد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

$$f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$$

$$f'(x) = 9 + 6x - 3x^2 \quad \text{الفحص}$$

$$[9 + 6x - 3x^2 = 0] : 3$$

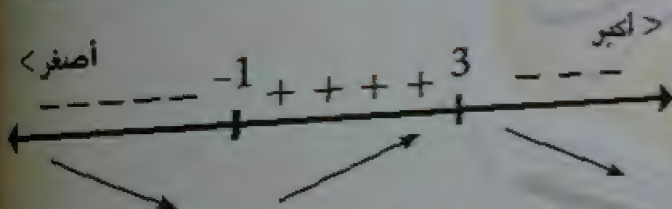
$$3 + 2x - x^2 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{يجب أن تكون} \\ \text{لذلك نضربها} \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{تجربة}$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$\text{أما } x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$\text{أو } x+1=0 \Rightarrow x=-1$$



$$f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$$

$$f(3) = 9(3) + 3(3)^2 - (3)^3$$

$$= 27 + 27 - 27$$

$$= 27$$

نقطة نهاية عظمى محلية (3, 27)

$$f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3$$

$$= -9 + 3 + 1 = -5$$

نقطة نهاية صغرى محلية (-1, -5)

مناطق التزايد في الفترة المفتوحة (-1, 3)

$$\{x : x < -1\} \quad \text{مناطق التناقص}$$

$$\{x : x > 3\}$$

سؤال 3 إذا كانت $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ حدد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \quad \text{الفحص}$$

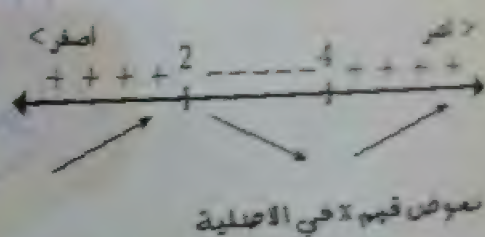
$$[3x^2 - 18x + 24 = 0] : 3$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \text{تجربة}$$

$$(x-4)(x-2) = 0$$

$$\text{أما } x-4=0 \Rightarrow x=4$$

$$\text{أو } x-2=0 \Rightarrow x=2$$



$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

$$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2)$$

$$= 8 - 36 + 48$$

$$= 20$$

نقطة نهاية عظمى محلية (2, 20)

$$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4)$$

$$= 64 - 144 + 96 = 16$$

نقطة نهاية صغرى محلية (4, 16)

مناطق التزايد

$$\{x : x > 4\}$$

$$\{x : x < 2\}$$

مناطق التناقص في الفترة المفتوحة (2, 4)

إذا كانت $f(x) = x^4 - 2x^2$ جد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

سؤال 7

الحل

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

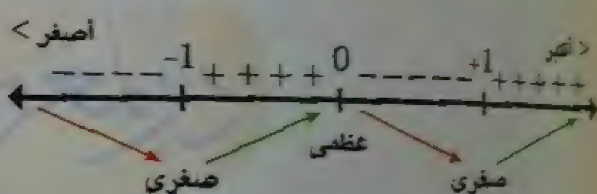
$$[4x^3 - 4x = 0] \div 4$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 = 1 - 2 = -1$$

نقطة نهاية صغرى محلية $(-1, -1)$

$$f(0) = (0)^4 - 2(0)^2 = 0 - 0 = 0$$

نقطة نهاية عظمى محلية $(0, 0)$

$$f(1) = (1)^4 - 2(1)^2 = 1 - 2 = -1$$

نقطة نهاية صغرى محلية $(1, -1)$

مناطق التزايد $\{x : x > 1\}$

وفي الفترة المفتوحة $(-1, 0)$

مناطق التناقص $\{x : x < -1\}$

وفي الفترة المفتوحة $(0, 1)$

إذا كانت $f(x) = 1 - x^5$ حدد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

سؤال 9

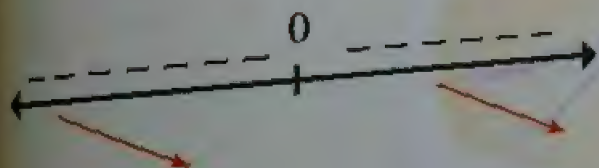
$$f(x) = 1 - x^5$$

$$f'(x) = -5x^4 \quad \text{الفحص}$$

$$[-5x^4 = 0] \div -5$$

$$x^4 = 0 \quad \text{بالجذر الرابع}$$

$$x = 0$$



∴ لا توجد نهايات لأن الدالة متناقصة دائماً

$$f(0) = 1 - (0)^5 = 1$$

$$(0, 1) \quad \text{حرجة}$$

$$\{x : x > 0\} \quad \text{مناطق التناقص}$$

$$\{x : x < 0\}$$

إذا كانت $f(x) = x^3 + 2$ حدد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

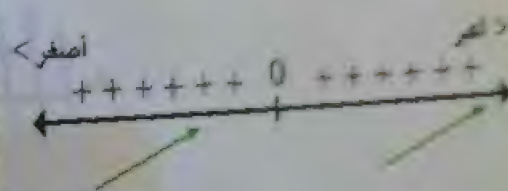
سؤال 8

$$f(x) = x^3 + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 \quad \text{الفحص}$$

$$[3x^2 = 0] \div 3$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{بالجذر}$$



∴ لا توجد نهايات لأن الدالة متزايدة دائماً

$$f(x) = x^3 + 2$$

$$f(0) = (0)^3 + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$(0, 2) \quad \text{حرجة}$$

$$\{x : x > 0\} \quad \text{مناطق التزايد}$$

$$\{x : x < 0\}$$

مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

خطوات الحل

- 1 نشتق الدالة مرتين $\bar{\bar{f}}(x)$
- 2 نساوي المشتقة الثانية للصفر $\bar{\bar{f}}(x) = 0$ ونجد x .
- 3 نفحص القيم على خط الاعداد.
- 4 نعوض x في الدالة الأصلية لنجد نقاط الانقلاب.

++++ تقعر

----- تحدب

$-x^2$ $+x^2$

* كل دالة من الدرجة الثانية اما مقعرة أو محدبة ولا يوجد فيها انقلاب.

أمثلة توضيحية

$f(x) = x^2 + 2x$	$\Rightarrow +x^2$	الدالة مقعرة دائماً	U
$f(x) = 5x - x^2$	$\Rightarrow -x^2$	الدالة محدبة دائماً	∩
$f(x) = 3 - x - x^2$	$\Rightarrow -x^2$	الدالة محدبة دائماً	∩
$f(x) = 3 + 5x + x^2$	$\Rightarrow +x^2$	الدالة مقعرة دائماً	U

أعلى أسس هو (2)

سؤال 2 جد مناطق التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = 4x^3 - x^4$

الحل

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$$

$$f''(x) = 24x - 12x^2 \quad \text{الفحص}$$

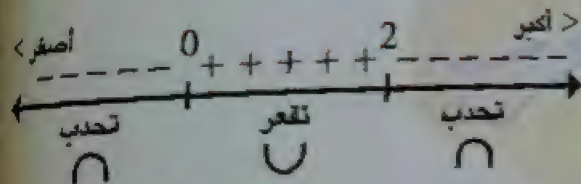
$$[24x - 12x^2 = 0] \div 12$$

$$2x - x^2 = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

$$x = 0$$

$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$$



$$f(x) = 4x^3 - x^4$$

$$f(0) = 4(0)^3 - (0)^4$$

$$= 0 - 0 = 0$$

نقطة انقلاب (0, 0)

$$f(2) = 4(2)^3 - (2)^4$$

$$= 32 - 16 = 16$$

نقطة انقلاب (2, 16)

$\{x: x > 2\}$ مناطق التحدب

$\{x: x < 0\}$

مناطق التفرع في الفترة المفتوحة (0, 2)

سؤال 1 جد مناطق التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = x^3 - 3x$

الحل

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x \quad \text{الفحص}$$

$$[6x = 0] \div 6$$

$$x = 0$$



$$f(0) = (0)^3 - 3(0)$$

$$= 0 - 0 = 0$$

نقطة انقلاب (0, 0)

$\{x: x > 0\}$ مناطق التفرع

$\{x: x < 0\}$ مناطق التحدب

$$f''(1) = 6(1) = +6$$

$$f''(-1) = 6(-1) = -6$$

غير مطلوبة للتوضيح فقط

جد مناطق التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = x^2$.

$$\bar{f}(x) = 2x$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 2, 2 \neq 0$$

\therefore لا يوجد انقلاب، الدالة مقعرة دائماً.

جد مناطق التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$.

$$\bar{f}(x) = 4x^3 + 6x$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 12x^2 + 6$$

$$12x^2 + 6 \neq 0 \text{ مجموع مربعين}$$

مقعرة دائماً

جد مناطق التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = x^4 + x^2$.

$$\bar{f}(x) = 4x^3 + 2x$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 12x^2 + 2$$

$$12x^2 + 2 \neq 0 \text{ مجموع مربعين}$$

دائماً $(+)$ الدالة مقعرة دائماً

ملاحظة إذا كان لدينا $x^2 + \text{رقم} \neq 0$ فتكون مقعرة دائماً وإذا كانت: $\text{رقم} + x^2$ فتكون متزايدة دائماً

جد مناطق التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

$$\bar{f}(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 12x - 6$$

$$12x - 6 = 0$$

$$[12x = 6] + 12$$

$$x = \frac{1}{2}$$



$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 6 + 1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{24}{4} + \frac{4}{4}$$

$$= \frac{1 - 3 - 24 + 4}{4} = \frac{-22}{4} = -\frac{11}{2}$$

نقطة انقلاب $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)$

$$\left\{x: x > \frac{1}{2}\right\} \text{ مناطق التفرع}$$

$$\left\{x: x < \frac{1}{2}\right\} \text{ مناطق التحدب}$$

المستند في الرياضيات

سؤال 7

جد مناطق التفعر والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة

$$f(x) = 4 - (x+2)^4$$

الحل

$$f'(x) = 0 - 4(x+2)^3 \quad (1)$$

$$f''(x) = -12(x+2)^2 \quad (2)$$

حتى ان لم يكتب لا يؤثر لان (1) عنصر معاد في عملية الضرب

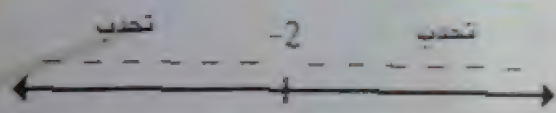
$$f''(x) = -12(x+2)^2$$

الفحص

$$[-12(x+2)^2 = 0] \div -12$$

$$(x+2)^2 = 0 \quad \text{بالجذر}$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$



الدالة محدبة دائماً

$$\{x : x > -2\}$$

$$\{x : x < -2\}$$

سؤال 8

جد مناطق التفعر والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

الحل

$$f'(x) = x + x^{-2}$$

$$f'(x) = 1 - 1x^{-2}$$

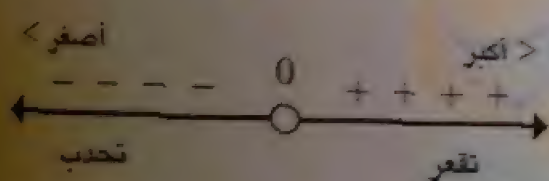
$$f''(x) = 0 + 2x^{-3}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \frac{2}{x^3} \neq \frac{0}{1}$$

$$2 \neq 0$$

* نأخذ القيمة التي نجعل

$$x=0 \quad \text{المقام = صفر}$$



$$\{x : x > 0\} \quad \text{مناطق التقعر}$$

$$\{x : x < 0\} \quad \text{مناطق التحدب}$$

* لا نعوض في مثل هذه الحالة لأن $x=0$

لجعل المقام = صفر

أنت الوحيد إن سمعت حديثه
أخطأت لكن لا أدقق في الهوى
ما همتي الأخطاء والإعراب
وإذا رفعت "الحال" قلت : صواب !

اختبار المشتقة الثانية لنقاط النهايات العظمى والصغرى

$$F(x) - \bar{F}(x) - \bar{\bar{F}}(x)$$

\Downarrow \Downarrow \Downarrow
 y x نهاية

خطوات الحل

- (1) نشق الدالة مشتقة أولى
- (2) نساوي المشتقة الأولى للصفر ونجد قيم x .
- (3) نشق الدالة مشتقة ثانية.
- (4) نعوض قيم x بالمشتقة الثانية:

• عندما نعوض قيم x بالمشتقة الثانية سيكون لدينا ثلاثة احتمالات:

ناتج التعويض 0 بفشل
الاختبار فنكمل الحل
بالمشتقة الأولى

ناتج التعويض $-$
فالنهاية عظمى محلية

ناتج التعويض $+$
فالنهاية صغرى محلية

- (5) نعوض x بالدالة الاصلية لنجد نقاط النهايات.

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايصالها بالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء الملزمة مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال شرعي على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتأكد وأحذر ان هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون رقم ٢٦ لسنة ١٩٥٧ (المعدل برقم ٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

المستند في الرياضيات

π

سؤال 2 باستخدام اختبار المشتقة

الثانية إن أمكن جد النهايات المحلية للدالة

$$f(x) = 3x - x^3$$

الحل

$$f'(x) = 3 - 3x^2$$

$$3 - 3x^2 = 0$$

$$[3 = 3x^2] \div 3$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f''(x) = -6x$$

نعوض قيم x بالمشتقة الثانية:

$$f''(1) = -6(1) = -6 \quad x=1 \text{ عظمى}$$

$$f''(-1) = -6(-1) = +6 \quad x=-1 \text{ صغرى}$$

نعوض قيم x بالدالة الأصلية

$$f(x) = 3x - x^3$$

$$f(1) = 3(1) - (1)^3$$

$$= 3 - 1 = 2$$

نقطة نهاية عظمى محلية (1, 2)

$$f(-1) = 3(-1) - (-1)^3$$

$$= -3 + 1 = -2$$

نقطة نهاية صغرى محلية (-1, -2)

سؤال 1 باستخدام اختبار المشتقة

الثانية إن أمكن جد النهايات المحلية للدالة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

الحل

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$[3x^2 - 6x - 9 = 0] \div 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{تجزئة}$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$\text{أما } x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$\text{أو } x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

نعوض قيم x بالمشتقة الثانية:

$$f''(3) = 6(3) - 6$$

$$= 18 - 6 = 12 \quad x=3 \text{ صغرى}$$

$$f''(-1) = 6(-1) - 6$$

$$= -6 - 6 = -12 \quad x=-1 \text{ عظمى}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

$$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3)$$

$$= 27 - 27 - 27 = -27$$

نقطة نهاية صغرى محلية (3, -27)

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1)$$

$$= -1 - 3 + 9 = 5$$

نقطة نهاية عظمى محلية (-1, 5)

سؤال 4 باستخدام اختبار المشتقة الثانية إن أمكن جد النهايات المحلية للدالة $f(x) = 4 - (x+1)^4$

الحل

$$f'(x) = 0 - 4(x+1)^3 \quad (1)$$

فحص

$$[-4(x+1)^3 = 0] \div -4$$

$$(x+1)^3 = 0 \quad \text{بالجذر التكعيبي}$$

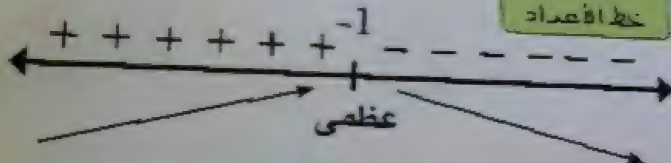
$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$f''(x) = -12(x+1)^2 \quad (1)$$

$$f''(-1) = -12(-1+1)^2$$

يفشل $=0$

نقحس على خط الأعداد



$$f(-1) = 4 - (-1+1)^4$$

$$= 4$$

نقطة نهاية عظمى محلية $(-1, 4)$

مناطق التزايد $\{x : x < -1\}$

مناطق التناقص $\{x : x > -1\}$

سؤال 3 باستخدام اختبار المشتقة الثانية إن أمكن جد النهايات المحلية للدالة $f(x) = 6x - 3x^2 - 1$

الحل

$$f'(x) = 6 - 6x$$

$$6 - 6x = 0$$

$$[6 = 6x] \div 6 \Rightarrow x=1$$

$$f''(x) = -6$$

نعوض قيم x بالمشتقة الثانية:

$$f''(1) = -6 \quad \text{عظمى}$$

نعوض قيم x بالدالة الأصلية

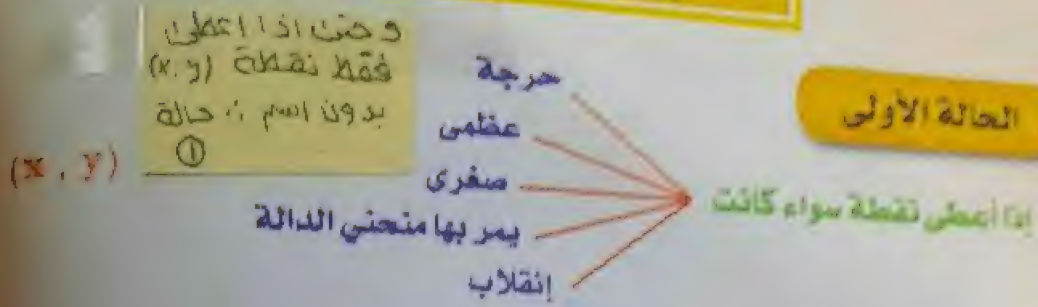
$$f(1) = 6(1) - 3(1)^2 - 1$$

$$= 6 - 3 - 1 = 2$$

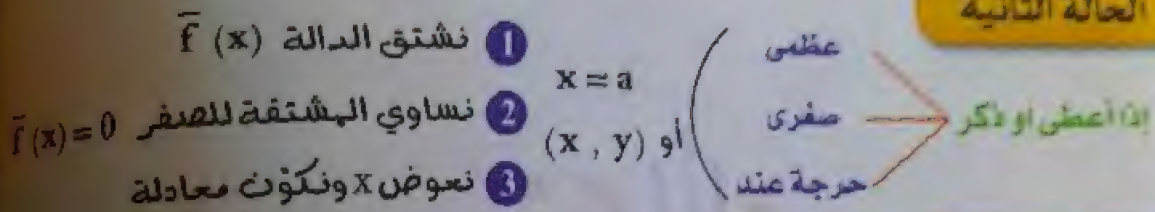
نقطة نهاية عظمى محلية $(1, 2)$



إيجاد قيم الثوابت



نعوض بالدالة مباشرة دون تفكير $f(x) = y$



الحالة الثالثة
إذا أعطى أو ذكر انقلاب عند $x = a$ أو (x, y)

- ① نشتق الدالة مرتين $\bar{\bar{f}}(x)$
- ② نساوي المشتقة الثانية للصفر $\bar{\bar{f}}(x) = 0$
- ③ نعوض x ونكوّن معادلة.

الحالة الرابعة
عندما يعطي نهاية () عدد بدون x يمثل هذا الرقم (y)

أولاً، الحالة الرابعة
تتطلب الخطوات
التي ذكرتها

خطوات الحل

- ① نشتق الدالة $\bar{f}(x)$
- ② نساوي المشتقة للصفر $\bar{f}'(x) = 0$
- ③ نجد x ونفحص على خط الأعداد
- ④ نختار من خط الأعداد القيمة المناسبة

- ⑤ إذا ذكر عظمى نختار x التي عندها عظمى وإذا ذكر صغرى نختار x التي عندها x صغرى
- بعد ذلك نختار قيمة x المناسبة يصبح لدينا زوج مرتب ونرجع إلى الحالة الأولى

الاحيائي
التحليلي

2

تطبيقات التفاضل

التماس: 1 مستقيم يمس منحنى ميل المنحنى = ميل المستقيم

الحالة الخامسة

$$m = - \left(\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} \right)$$

$$\text{ميل المنحنى} \quad \bar{f}(x) = \bar{y}$$

تنبيه علمي

يتساوى ميل المنحنيين $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$ فقط عند قيمة x المعطاة في السؤال وليس عند جميع قيم x .

2 منحنى يمس منحنى
متماسان

$$\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$$

ملاحظات

- 1 ميل التماس = $\bar{f}(x) = \bar{y}$ ميل المنحنى
- 2 عدد المعادلات = عدد المجاهيل = عدد الحالات
- 3 عدد المعلومات = عدد المجاهيل = عدد الحالات
- 4 إذا ذكر عبارة بين نوع النقطة الحرجة معناها المطلوب
ونطبق خطوات النهايات العظمى والصغرى
- 5 عبارة المنحنى مقعر ومحدب ويعطي التحذب والتقعر بالشكل التالي:

$$\{x : x > a\} \quad \{x : x < a\}$$

معناها انقلاب عند $x = a$ ونطبق الحالة الثالثة

6 إذا طلب معادلة التماس نحتاج الى ميل ونقطة (x_1, y_1)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\text{ميل} = \bar{f}(x)$$

7 نقطة تنتمي لمحور السينات معناها $y = 0$

8 نقطة تنتمي لمحور الصادات معناها $x = 0$

سؤال 1 إذا كانت $(2, 6)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x) = a - (x - b)^4$ فبما $a, b \in \mathbb{R}$ وبين نوع النقطة الحرجة.

2011 / خارج القطر

حالة أولى

$$\begin{cases} f(x) = a - (x - b)^4 \\ 6 = a - (2 - b)^4 \end{cases} \quad (1)$$

نشتق من (1) بالاشتقاق
نسويها
بـ 0

$$f'(x) = 0 - 4(x - b)^3 \quad (1)$$

$$[-4(x - b)^3 = 0] \div -4$$

$$(x - b)^3 = 0 \quad \text{بالجذر التكعيبي}$$

$$x - b = 0 \quad \text{من السؤال} \quad x = 2$$

$$2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$6 = a - (2 - b)^4 \quad (1)$$

$$6 = a - (2 - 2)^4 \Rightarrow a = 6$$

نعوض بالدالة الأصلية

الدالة بدون مجاهيل

$$f(x) = 6 - (x - 2)^4$$

$$f'(x) = -4(x - 2)^3$$

$$[-4(x - 2)^3 = 0] \div -4$$

$$(x - 2)^3 = 0 \quad \text{بالجذر التكعيبي}$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$



نقطة نهاية عظمى محلية



إذا الدنا حل معناه
تحتوي مجهولين
نضع المجهول بجوهر
والآخر قائم بجوهر
 $a, b, c = 1, 2, \dots$

فإذا
وإذا

تطبيقات التفاضل

المطلوب في السؤال
تحديد النهاية
التي تكون عند نقطة
التي تكون عند نقطة

حيطة



التدريب في الرياضيات

عبر قيمة الثابتين $a, b \in \mathbb{R}$ لكي يكون لمنحنى الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ ثم حدد نقطة الانقلاب.

$$y = x^3 + ax^2 + bx$$

$$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

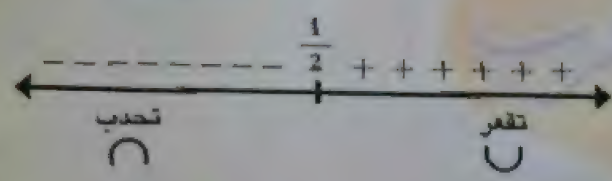
$$\bar{y} = 3x^2 - \frac{3}{2}(2)x - 6$$

$$\bar{y} = 3x^2 - 3x - 6$$

$$\bar{y} = 6x - 3 \quad \text{الفحص}$$

$$6x - 3 = 0 \Rightarrow [6x = 3] + 6$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$



$$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{1}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{3}{1}$$

$$= \frac{1 - 3 - 24}{8} = \frac{-26}{8} = \frac{-13}{4}$$

$$\text{نقطة انقلاب } \left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$$

لا يكون في هذه النقطة
لأنه إيجاد الانقلاب بشكل
جديد وهو ان ليس له
عوضه وان كان الاول
وله خطوط حتمية

- 1 دور / 2013
- 2 دور / 2013
- 1 دور / 2008
- 2 دور / 2015
- 1 دور / 2016

$$y = x^3 + ax^2 + bx$$

نهاية عظمى عند $x = -1$

$$\bar{y} = 3x^2 + 2ax + b$$

$$3x^2 + 2ax + b = 0$$

$$3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0$$

$$-2a + b = -3 \quad \text{--- 1}$$

نهاية صغرى عند $x = 2$

$$\bar{y} = 3x^2 + 2ax + b$$

$$3(2)^2 + 2a(2) + b = 0$$

$$4a + b = -12 \quad \text{--- 2}$$

$$-2a + b = -3 \quad \text{--- 1}$$

$$\text{بالطرح } 4a + b = -12 \quad \text{--- 2}$$

$$[-6a = +9] \div -6 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$-2a + b = -3 \quad \text{--- 1}$$

$$-2a + b = -3 \quad \text{--- 1}$$

$$-2\left(-\frac{3}{2}\right) + b = -3$$

$$3 + b = -3$$

$$b = -3 - 3 \Rightarrow b = -6$$

المستند في الرياضيات

سؤال 3 إذا كانت المنحني $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ ممعر $\{x: x < 1\}$ ومحدب $\{x: x > 1\}$ ويبس المستقيم $y + 9x = 28$ عند $(3, 1)$ جد قيم $a, b, c \in \mathbb{R}$

لحل المعادلات المتشابهة
«بالحذف»

بحل المعادلتين 2 و 3

$$9a + 2b = -3 \quad \dots\dots 3$$

$$6a + 2b = 0 \quad \dots\dots 2$$

$$3a = -3 \Rightarrow a = -1$$

نعوض في 2

$$6a + 2b = 0$$

$$6(-1) + 2b = 0 \Rightarrow -6 + 2b = 0$$

$$[2b = 6] \div 2 \Rightarrow b = 3 \quad 1$$

لحل المعادلات
المختلفة
«بالتعويض»

$$27a + 9b + c = 1$$

$$27(-1) + 9(3) + c = 1$$

$$-27 + 27 + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

2017 / دور 1

معادلات مختلفة
- معادلات متشابهة
- معادلات مختلفة
- معادلات مختلفة
- معادلات مختلفة

معادلات متشابهة
(لها نفس الجاهيل)
(لها نفس المعاليم)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \quad (3, 1)$$

$$1 = a(3)^3 + b(3)^2 + c$$

$$27a + 9b + c = 1 \quad \dots\dots 1$$

انقلاب عند $x=1$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f'(x) = 6ax + 2b$$

$$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \quad \dots\dots 2$$

ميل المنحني = ميل المستقيم

$$m = -\left(\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y}\right) = -\left(\frac{9}{1}\right)$$

$$m = -9 \quad \text{مستقيم}$$

$$f'(x) = \text{ميل المنحني}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$-9 = 3ax^2 + 2bx$$

$$-9 = 3a(3)^2 + 2b(3)$$

$$[27a + 6b = -9] + 3$$

$$9a + 2b = -3 \quad \dots\dots 3$$

الأحيائي
التطبيقي
تطبيقات التفاضل

المستقيم $3x - y = 7$ ممس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند $(2, -1)$

وكذلك له نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيم $a, b \in \mathbb{R}$ وما نوع النهاية؟

1a / 2016

ع / 2016

3a / 2016

$$a + b = 0 \quad \dots\dots 3$$

$$1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$4a + 2b + c = -1 \quad \dots\dots 1$$

$$4(1) + 2(-1) + c = -1$$

$$4 - 2 + c = -1 \Rightarrow 2 + c = -1$$

$$c = -1 - 2 \Rightarrow c = -3$$

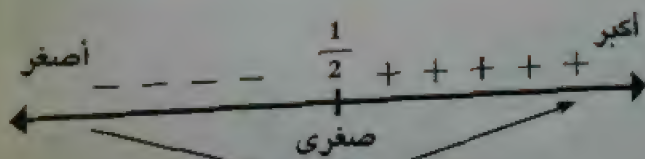
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = x^2 - x - 3$$

$$\bar{y} = 2x - 1 \quad \text{الفحص}$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow [2x = 1] + 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$



$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 3$$

$$y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3$$

$$y = \frac{1 - 2 - 12}{4} = \frac{-13}{4}$$

نقطة نهاية صغرى محلية $\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$

النقطة $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$-1 = a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2}\right) + c$$

$$4a + 2b + c = -1 \quad \dots\dots 1$$

ميل المنحني = ميل المستقيم

$$\text{ميل المستقيم} = -\left(\frac{\text{مائل}}{\text{مائل}}\right) = -\left(\frac{2}{1}\right)$$

$$\Rightarrow \text{مستقيم } m = 3$$

$$\text{ميل المنحني} \Rightarrow \bar{y} = 2ax + b$$

$$2ax + b = 3$$

$$2a\left(\frac{1}{2}\right) + b = 3 \Rightarrow 4a + b = 3 \quad \dots\dots 2$$

نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$

$$\bar{y} = 2ax + b$$

$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2a\left(\frac{1}{2}\right) + b = 0$$

$$a + b = 0 \quad \dots\dots 3$$

$$4a + b = 3 \quad \dots\dots 1$$

$$-3a = -3 \Rightarrow a = 1$$

نعوض في 3

بالطرح

سؤال 5 إذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعرة $\forall x > 1$ وسدبة $\forall x < 1$ وللدالة نقطة نهاية عظمى محلية $(-1, 5)$ فجد قيم $a, b, c \in \mathbb{R}$

الحل

النقطة $(-1, 5)$ هي

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$5 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1)$$

$$-a + b - c = 5 \quad \dots\dots 1$$

نهاية عظمى $x = -1 \Leftrightarrow (-1, 5)$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0$$

$$3a - 2b + c = 0 \quad \dots\dots 2$$

انقلاب عند $x = 1$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$[6ax + 2b = 0] + 2$$

$$3a + b = 0 \quad \dots\dots 3$$

$$-a + b - c = 5$$

$$3a - 2b + c = 0 \quad \text{بالجمع}$$

$$2a - b = 5 \quad \dots\dots 4$$

$$3a + b = 0 \quad \text{بالجمع} \quad \dots\dots 5$$

$$[5a = 5] + 5$$

$$a = 1$$

يعوض $a = 1$ في 3

$$3a + b = 0$$

$$3(1) + b = 0 \Rightarrow 3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$$

نعوض في 1

$$-a + b - c = 5$$

$$-(1) + (-3) - c = 5$$

$$-1 - 3 - 5 = c$$

$$c = -9$$

2017 / ت 2015 / خ 2012 / د 2015 / د

نعوض:
(x, y) بالمتغيرات
(x, y) بالمتغيرات
(x, y) بالمتغيرات
(x, y) بالمتغيرات
في معادلة المتغير
ثم معادلة المتغير

المعادلة التي نحوي
(x, y) معادلات
عستقيم

سؤال 6 إذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ و $g(x) = 1 - 12x$ وكانت كل من f, g متباينات عند نقطة انقلاب f وهي $(1, -11)$ جد قيم الثوابت $a, b, c \in \mathbb{R}$

$2 = x$
نقطة انقلاب
وكانت متساوية

$$a + b + c = -11 \quad \text{..... 1}$$

بالطرح

$$-3a - 2b + c = \pm 12 \quad \text{..... 2}$$

$$-2a - b = 1 \quad \text{..... 4}$$

$$3a + b = 0 \quad \text{..... 2} \quad \text{بالجمع}$$

$$a = 1$$

نعويض في معادلة 2

$$3(1) + b = 0$$

$$3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$$

$$a + b + c = -11 \quad \text{1} \quad \text{نعويض في 1}$$

$$1 - 3 + c = -11 \Rightarrow -2 + c = -11$$

$$c = -9$$

$$f(x) = y$$

$$f'(x) = 0$$

$$f''(x) = 0$$

2 د / 2014

تمديد 2017

1 د / 2017

y

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad (1, -11)$$

$$-11 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1)$$

$$a + b + c = -11 \quad \text{..... 1}$$

$$\bar{f}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\bar{f}(x) = 6ax + 2b$$

انقلاب عند

$$x = 1$$

$$[6ax + 2b = 0] + 2$$

$$3a + b = 0 \quad \text{..... 2}$$

ميل المنحني f = ميل المنحني g

$$\bar{g}(x) = \bar{f}(x)$$

$$g(x) = 1 - 12x \Rightarrow \bar{g}(x) = -12$$

$$\bar{f}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$$

$$3ax^2 + 2bx + c = -12$$

$$3a(1)^2 + 2b(1) + c = -12$$

$$3a + 2b + c = -12 \quad \text{..... 3}$$

سؤال 7 إذا كانت للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ونقطة انقلاب عند $x=1$ جد $a, c \in \mathbb{R}$

الحل

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$$

$$8 = -(2)^3 + 3(2)^2 + c$$

$$8 = -8 + 12 + c$$

$$8 = 4 + c$$

$$c = 4$$

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x$$

$$f''(x) = 6ax + 6$$

$$6ax + 6 = 0 \Rightarrow 6a(1) + 6 = 0$$

$$[6a = -6] + 6 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c \Rightarrow$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

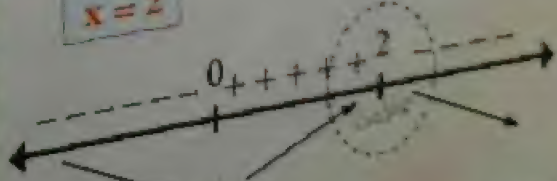
$$[-3x^2 + 6x = 0] + 3$$

$$-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0$$

$$x = 0$$

$$-x + 2 = 0$$

$$x = 2$$



$$y = 8, x = 2$$

$$(2, 8)$$

تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار الغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهننا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ٢٠٠٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق وتذكّر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

تطبيقات التفاضل

إذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ عند قيمة c فإن جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه.

سؤال 8

3 د / 2016

2012 / خارج

الحل

الفصل
 $\bar{f}(x) = 6x - 3x^2$

$$[6x - 3x^2 = 0] + 3$$

$$2x - x^2 = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

أما $x = 0$

أو $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$



$$x = 0, y = 6$$

$$(0, 6)$$

$$f(x) = 3x^2 - x^3 + c$$

$$6 = 3(0)^2 - (0)^3 + c$$

$$c = 6$$

في هذه الحالة يوجد
نقطة انقلاب وهي
نقطة (0, 6) أي أنها

$$f(x) = 3x^2 - x^3 + 6$$

$$\bar{f}(x) = 6x - 3x^2$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 6 - 6x$$

$$6 - 6x = 0 \Rightarrow [6x = 6] + 6$$

$$x = 1$$



$$f(1) = 3(1)^2 - (1)^3 + 6$$

$$= 3 - 1 + 6 = 8$$

$$(1, 8)$$

$$m = \bar{f}'(x)$$

$$\bar{f}'(1) = 6(1) - 3(1)^2$$

$$= 6 - 3 = 3 \Rightarrow m = 3$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 8 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 8 = 3x - 3$$

$$3x - y - 3 + 8 = 0$$

$$3x - y + 5 = 0$$

معادلة المماس

$$ax + by + c = 0$$

سؤال 10 لنكن $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ برهن
ان الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

15/2013

الحل

تعديل $f(x) = x^2 - ax^{-1}$

$f'(x) = 2x + ax^{-2}$

$f'(x) = 2x + \frac{a}{x^2}$

$\left[2x + \frac{a}{x^2} = 0\right] * x^2$

$2x^3 + a = 0 \Rightarrow [2x^3 = -a] + 2$

بالجذر التكعيبي $x^3 = \frac{-a}{2}$

$x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

$f'(x) = 2x + ax^{-2}$

$f'(x) = 2 - 2ax^{-3}$

$f'(x) = 2 - \frac{2a}{x^3}$

$f'\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right) = 2 - \frac{2a}{\frac{-a}{2}}$

$= 2 + 2a\left(\frac{2}{a}\right)$

$= 2 + 4 = +6$

$f'\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right) > 0$

∴ الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية
تصلك بنهاية مغفرت

سؤال 9 لنكن $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث
 $a \in \{-4, 8\}$ جد قيمة إذا كانت:

1) الدالة محدبة $-x^2 \rightarrow -\infty$

2) الدالة مقعرة $+x^2 \rightarrow +\infty$

الحل

$f'(x) = 2ax - 6$

$f'(x) = 2a$

$2a < 0$

1) محدبة $a = -4$

$2a > 0$

2) مقعرة $a = 8$

مجموعة في علم
يسمى هذا الدالة
تصلك بنهاية
نك
دع ان الدالة
تصلك بنهاية
نك
مجموعة في علم
يسمى هذا الدالة
تصلك بنهاية
نك
دع ان الدالة
تصلك بنهاية
نك
واغار من علم
واحدة جا
ملا الحياة
ملا الحياة

مثال 11/ لنكن $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ أوجد قيمة a على أن الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x=1$ ثم بين هل للدالة نهاية عظمى محلية. **حل:** 3. اختيار مشتقة

1 د / 2008

ع

$$\left[2x + \frac{1}{x^2} = 0 \right] * x^2$$

$$2x^3 + 1 = 0$$

$$[2x^3 = -1] \div 2$$

$$x^3 = \frac{-1}{2} \quad \text{بالجذر التكعيبي}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$$

$$\bar{f}(x) = 2 + \frac{2a}{x^3}$$

$$\bar{f}(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$$

$$\bar{f}\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right) = 2 - \frac{2}{\frac{-1}{2}}$$

$$= 2 + 4 = 6 > 0$$

∴ للدالة نهاية صغرى محلية

لا تمتلك نهاية عظمى محلية

* من الممكن استخدام خط الأعداد لمعرفة نوع النهاية ولكن تم حل السؤال باختبار المشتقة الثانية.

$$f(x) = x^2 + ax^{-1} \quad \text{تعديل}$$

$$\bar{f}(x) = 2x - ax^{-2}$$

$$\bar{f}(x) = 2 + 2ax^{-3}$$

$$\bar{f}(x) = 2 + \frac{2a}{x^3} \quad \text{بمشتقة الثانية}$$

$$2 + \frac{2a}{x^3} = 0, \quad x=1 \quad \text{مرافق}$$

$$2 + \frac{2a}{(1)^3} = 0$$

$$2 + 2a = 0$$

$$2a = -2$$

$$a = -1 \quad \text{بموضع الأصلية}$$

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^2 - x^{-1}$$

$$\bar{f}(x) = 2x + x^{-2}$$

$$\bar{f}(x) = 2x + \frac{1}{x^3}$$

أولاً، الدوال كثيرات الحدود

خطوات الحل

أولاً، أوسع مجال x -

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحاور،

1 مع محور السينات $y=0$ ونستخرج قيمة x

2 مع محور الصادات $x=0$ ونستخرج قيمة y

ثالثاً، التناظر

رابعاً، المعاديات (لا يوجد لأن الدالة ليست نسبية)

خامساً، النهايات العظمى والصغرى.

سادساً، نقاط الانقلاب ومناطق التفرع والتحدب.

سابعاً، الجدول والرسم.

التناظر:

أولاً، التناظر حول محور الصادات وتحدث إذا كان لدينا،

$$f(x) = f(-x)$$

1 نعوض $(-x)$ بالدالة ويكون الناتج يشبه الأصلية [هذه الخطوة عقلية]

2 إذا كانت الدالة ذات أسس زوجية فقط [هذه الخطوة للتأكيد فقط (لا تكتب)].

1 $f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 \rightarrow$ تشبه الأصل

$f(x) = f(-x)$ الدالة متناظرة حول محور الصادات.

2 $f(x) = x^4 - 2x^2$

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2$

$f(-x) = x^4 - 2x^2 \rightarrow$ تشبه الأصل

$f(x) = f(-x)$ الدالة متناظرة حول محور الصادات.



الاحيائي
التطبيقي

2

تطبيقات التفاضل

ثانياً، التناظر حول نقطة الأصل وتحدث إذا كان لدينا،

$$f(-x) = -f(x)$$

- 1) نعوض $(-x)$ بالدالة وبعدها نسحب السالب عامل مشترك فيكون الناتج بعد العامل يساوي الأصلية [الخطوة العملية].
- 2) الدالة ذات أسس فردية فقط [هذه الخطوة للتأكد فقط (لا تكتب)].

1) $f(x) = x^3$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$$

الدالة بدوت السالب
نظيره الأصلية

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{الدالة متناظرة حول نقطة الأصل}$$

2) $f(x) = x^3 - 3x$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 3(-x) \\ &= -x^3 + 3x \\ &= -(x^3 - 3x) \end{aligned}$$

الدالة بدوت السالب
نظيره الأصلية

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{الدالة متناظرة حول نقطة الأصل}$$



ملاحظة

إذا اختلفت الشروط المكتوبات باللون الأحمر فلا يوجد تناظر.

إذا كان هناك أسس
زوجية + فردية =
لا يوجد تناظر

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

ملاحظة

عند سحب $(-)$ عامل مشترك نعكس إشارة كل حدود الدالة.

خامساً، النهايات العظمى والصغرى

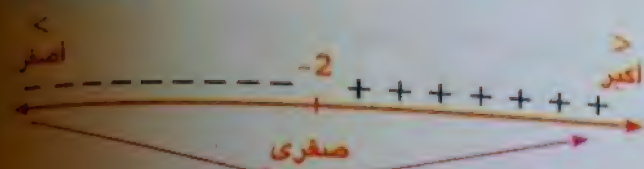
$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

الفحص

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow [2x = -4] + 2$$

$$x = -2$$



$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 3$$

$$= 4 - 8 + 3 = -1$$

نقطة نهاية صغرى محلية.

مناطق التناقص: $\{x: x < -2\}$

مناطق التزايد: $\{x: x > -2\}$

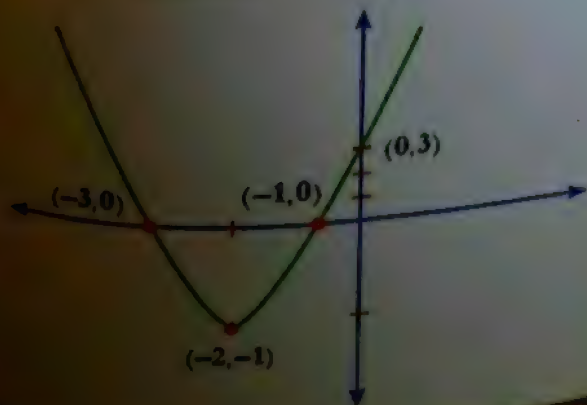
$$f''(x) = 2$$

$$2 \neq 0$$

لا يوجد انقلاب / الدالة مقعرة دائماً.

سابعاً، الجدول والرسم

x	y	(x,y)
-3	0	(-3,0)
-1	0	(-1,0)
0	3	(0,3)
-2	-1	(-2,-1)



ارسم منحنى الدالة

سؤال 1

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

1/2002 د 1

أولاً، أوسع مجال الدالة هو $-R$.

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحاورين:

$$y = 0 \quad \text{مع محور السينات}$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x+3)(x+1) = 0$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3, (-3, 0)$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1, (-1, 0)$$

$$x=0 \quad \text{مع محور الصادات}$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$f(0) = (0)^2 + 4(0) + 3 = 3, (0, 3)$$

ثالثاً، التناظر،

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 4(-x) + 3$$

$$= x^2 - 4x + 3 \quad (\text{لا تشبه الأصل})$$

$$= -(-x^2 + 4x - 3)$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

∴ لا يوجد تناظر

أيضاً، لا يوجد محاذيات لأن الدالة ليست نسبية.

الاحيائي
التطبيقي

2

$$f(1) = (1-1)^3 + 1 = 1$$

(1, 1) حرجة

$$\{x : x > 1\}$$

مناطق التناقص

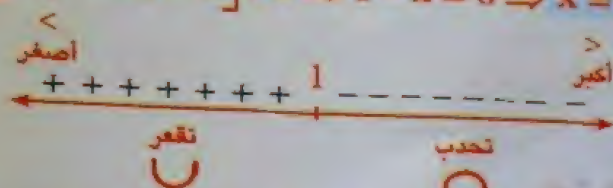
$$\{x : x < 1\}$$

سادساً، الانقلاب

$$\bar{f}(x) = -6(1-x)(-1)$$

$$\bar{f}(x) = 6(1-x) \quad \text{الفحص}$$

$$[6(1-x)=0] + 6 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$$



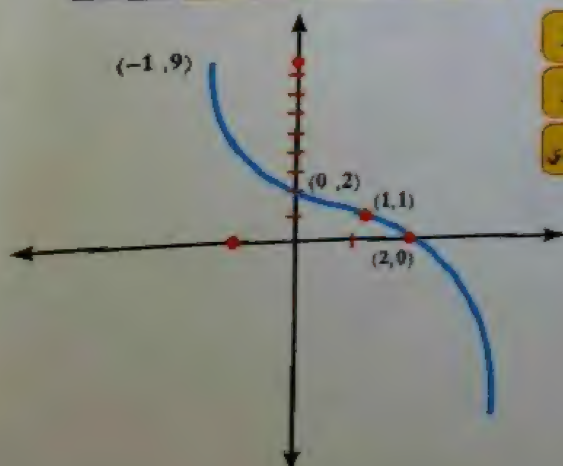
$$f(1) = (1-1)^3 + 1 = 1 \Rightarrow (1, 1) \text{ نقطة انقلاب}$$

$$\{x : x > 1\}, \{x : x < 1\}$$

مناطق التقعر مناطق التحدب

سابعاً، الجدول والرسم

x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
2	0	(2, 0)
1	1	(1, 1)
-1	9	(-1, 9)



2 د / 2011

3 د / 2013

2016 / تمهيد

ارسم منحنى الدالة

$$f(x) = (1-x)^3 + 1$$

دولاً، أوسع مجال للدالة هو $-R$

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحاور

$$y=0 \quad \text{مع محور السينات}$$

$$(1-x)^3 + 1 = 0$$

$$(1-x)^3 = -1$$

$$1-x = -1 \Rightarrow 1+1 = x \Rightarrow x=2$$

$$x=0 \quad \text{مع محور الصادات}$$

$$f(0) = (1-0)^3 + 1$$

$$= 1+1=2, (0, 2)$$

ثالثاً، التناظر

$$f(x) = (1-x)^3 + 1$$

$$f(-x) = (1+x)^3 + 1 = -[-(1+x^3)-1]$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

لذلك، الدالة ليست فسيية.

لذلك، النهايات العظمى والصغرى.

$$f(x) = (1-x)^3 + 1$$

$$\bar{f}(x) = 3(1-x)^2(-1)+0$$

$$\bar{f}(x) = -3(1-x)^2 \quad \text{الفحص}$$

$$[-3(1-x)^2=0] + -3$$

$$(1-x)^2 = 0 \quad \text{بالجذر التربيعي}$$

$$1-x=0 \Rightarrow x=1$$



التحليلي
التطبيقي

لا توجد نهايات / الدالة متزايدة دائماً في مجالها .

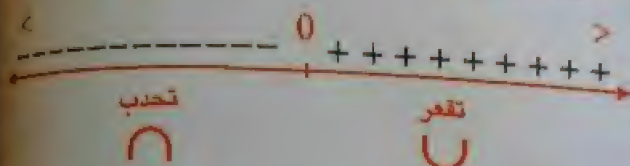
حرجة $f(0) = (0)^5 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

مناطق التزايد $\{x : x < 0\}$, $\{x : x > 0\}$

سادساً: الانقلاب

الفحص $f(x) = 20x^3$

$[20x^3 = 0] \div 20 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$



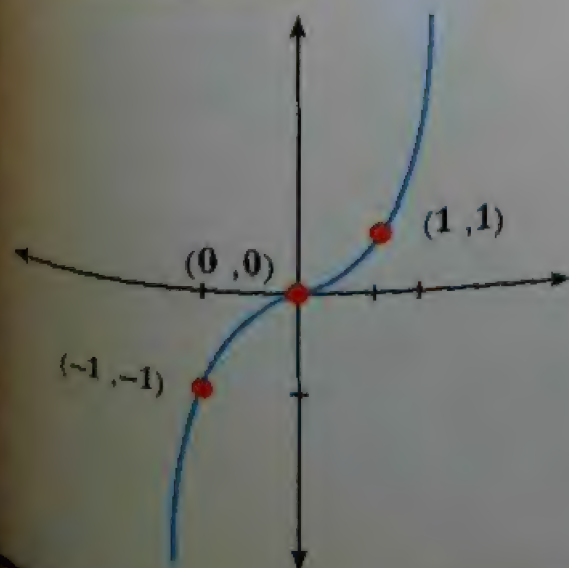
نقطة انقلاب $f(0) = (0)^5 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

$\{x : x > 0\}$, $\{x : x < 0\}$

مناطق التحدب مناطق التقعر

سابعاً: الجدول والرسم:

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
-1	-1	(-1, -1)
2	32	(2, 32)



سؤال 3 ارسم منحنى الدالة $f(x) = x^3$

الحل

أولاً: توسع مجال للدالة هو \mathbb{R} .

ثانياً: تقاطع التقاطع مع المحورين

مع محور السينات $y = 0$

بالبذر الخامس $x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

$(0, 0)$

مع محور الصادات $x = 0$

$f(0) = (0)^3 \Rightarrow (0, 0)$

ثالثاً: التناظر:

$f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

$= -(x^3)$ (نقيض الأصل)

∴ متناظرة حول نقطة الأصل لأن:

$f(-x) = -f(x)$

رابعاً: المتطابقات لا يوجد لأن الدالة ليست نسبية.

خامساً: النهايات المقسمة والصغرى:

$f(x) = x^5$

الفحص $f(x) = 5x^4$

$[5x^4 = 0] \div 5$

$\Rightarrow x^4 = 0$ بالبذر الرابع

$x = 0$



1د / 2000

2د / 2000

ت / 2008

ع / 2007

1د / 2013

ت / 2014

2014 / لأرحين

$$f(x) = 10 - 3x - x^2$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 10 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} \quad \text{توحيد مقامات}$$

$$= \frac{40 + 18 - 9}{4} = \frac{49}{4} = 12 \frac{1}{4}$$

$$\left(-1\frac{1}{2}, 12\frac{1}{4}\right) \quad \text{نقطة نهاية عظمى محلية}$$

$$\left\{x : x < -\frac{3}{2}\right\}, \left\{x : x > -\frac{3}{2}\right\}$$

مناطق التزايد

مناطق التناقص

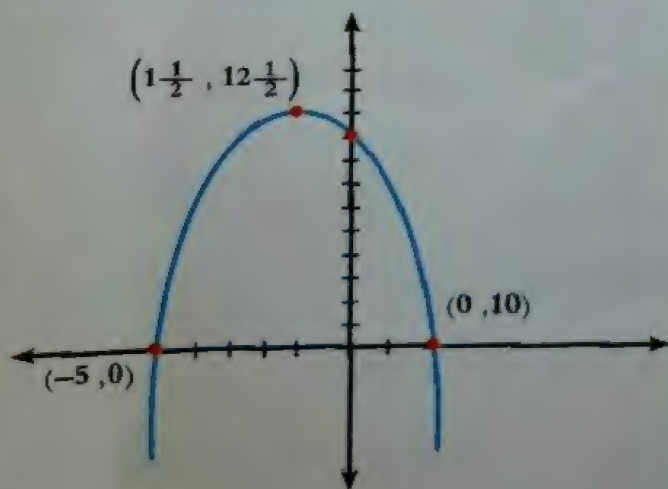
سادساً، الانقلاب

$$f''(x) = -2, \quad -2 \neq 0$$

لا يوجد انقلاب الدالة محدبة دائماً.

سابعاً، الجدول والرسم:

x	y	(x, y)
-5	0	(-5, 0)
2	0	(2, 0)
0	10	(0, 10)
$-1\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	$(-1\frac{1}{2}, 12\frac{1}{4})$



سؤال 4 ارسم منحنى الدالة $f(x) = 10 - 3x - x^2$ أولاً، أوسع مجال للدالة هو \mathbb{R} .

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحاورين

$$y = 0$$

$$10 - 3x - x^2 = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad (\text{تجربة})$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$\text{أما } x+5=0 \Rightarrow x=-5, \quad (-5, 0)$$

$$\text{أو } x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2, 0)$$

مع محور الصادات $x=0$

$$f(0) = 10 - 3(0) - (0)^2 = 10, \quad (0, 10)$$

ثالثاً، التناظر:

$$f(x) = 10 - 3x - x^2$$

$$f(-x) = 10 - 3(-x) - (-x)^2$$

$$= 10 + 3x - x^2$$

$$= -(-10 - 3x + x^2)$$

$$f(x) \neq f(-x) \quad \text{لا يوجد تناظر أفقي}$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

لذلك، المعطيات لا يوجد لأن الدالة ليست نسبية.

رابعاً، النهايات العظمى والصغرى:

$$f(x) = 10 - 3x - x^2$$

2013/ت

$$f'(x) = -3 - 2x$$

$$-3 - 2x = 0 \Rightarrow [-3 = 2x] + 2$$

$$x = \frac{-3}{2}$$



خامساً النهايات العظمى والصغرى

$$f(x) = 2x^3 - x^4$$

$$f'(x) = 4x - 4x^3$$

الفحص

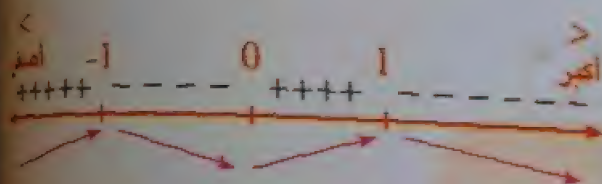
$$[4x - 4x^3 = 0] \div 4$$

$$x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0$$

$$\text{أما } x = 0$$

$$\text{بالجذر } 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$



$$f(x) = 2x^3 - x^4$$

$$f(0) = 2(0)^3 - (0)^4 = 0$$

نقطة نهاية صغرى محلية (0, 0)

$$f(1) = 2(1)^3 - (1)^4 = 2 - 1 = 1$$

نقطة نهاية عظمى محلية (1, 1)

$$f(-1) = 2(-1)^3 - (-1)^4 = -2 - 1 = -1$$

نقطة نهاية عظمى محلية (-1, -1)

$$\{x \mid x < -1\}$$

مناطق تزايد:

$$(0, 1)$$

وفي الفترة المفتوحة

$$\{x \mid x > 1\}$$

مناطق التناقص:

$$(-1, 0)$$

وفي الفترة المفتوحة

$$f(x) = 2x^3 - x^4$$

سؤال 5 ارسم منحنى الدالة

أولاً، أوسع مجال للدالة هو \mathbb{R} .
ثانياً، نقاط التقاطع مع المحاور

الحل

$$y = 0$$

مع محور السينات

$$2x^3 - x^4 = 0$$

$$x^3(2 - x) = 0$$

$$\text{أما } x^3 = 0 \Rightarrow x = 0, (0, 0)$$

$$\text{بالجذر } 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x = \pm \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$$

$$x = 0$$

مع محور الصادات

$$f(0) = 2(0)^3 - (0)^4 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

نقطة التناظر

$$f(x) = 2x^3 - x^4$$

ذات اksen زوجية

$$f(-x) = 2(-x)^3 - (-x)^4 = -2x^3 - x^4$$

تفحص الاصلية

∴ الدالة متناظرة حول محور الصادات لأن:

$$f(x) = f(-x)$$

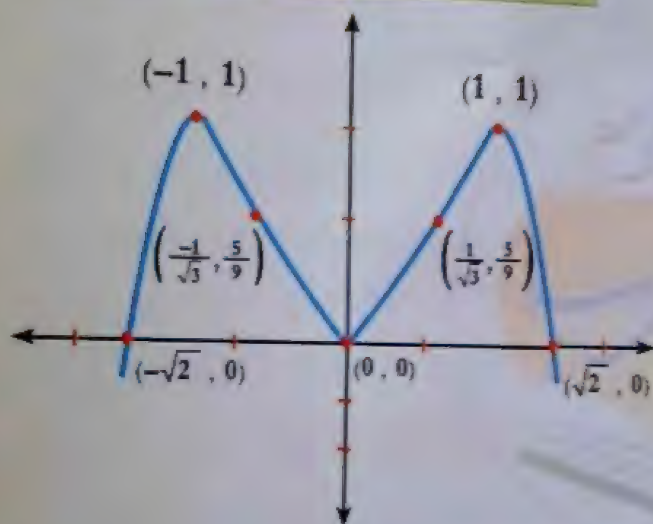
هذه المعادلات لا يوجد لأن الدالة ليست نسبية.

الاحيائي
التطبيقي

تطبيقات التفاضل

سابقاً، الجدول والمخطط

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
$\sqrt{2}$	0	$(\sqrt{2}, 0)$
$-\sqrt{2}$	0	$(-\sqrt{2}, 0)$
1	1	(1, 1)
-1	1	(-1, 1)
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{9}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{9}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$



ان كنت فيه قد اكتفيت بنظرة
وانا الذي في الحسن لا لا اكتفي
ماذا اقول وكيف ارق بالكلام
لوصف وجه في الجمال كيوسف

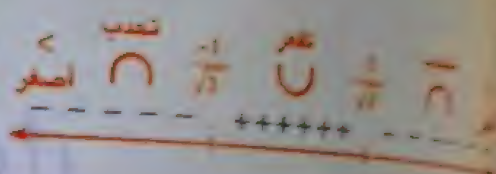
المعاد التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب

$$f(x) = 4 - 12x^2$$

$$[4 - 12x^2 = 0] + 4$$

$$1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow [1 = 3x^2] + 3$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$$

نقاط الانقلاب

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

مناطق التحدب

23/2012

تحيي

23/2018 تطبيق غارت القطر

موسم

تطبيقات التفاضل

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة $f(x) = 6x - x^3$

سؤال 6

الحل

أولاً: أوسع مجال للدالة R

ثانياً: نقاط التقاطع مع المحاور

مع محور السينات $y = 0$

$$6x - x^3 = 0 \Rightarrow x(6 - x^2) = 0$$

$$\text{أما } x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$\text{أو } 6 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 6$$

$$x = \pm \sqrt{6} \Rightarrow (\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$$

مع محور الصادات $x = 0$

$$f(0) = 6(0) - (0)^3 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

ثالثاً: التناظر

$$f(-x) = 6(-x) - (-x)^3$$

$$= -6x + x^3$$

$$= -(6x - x^3)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

الدالة متناظرة حول نقطة الأصل

رابعاً: المقاديريات

لا توجد محاذيات لأن الدالة ليست نسبية

خامساً: النهايات العظمى والصغرى

$$f'(x) = 6 - 3x^2$$

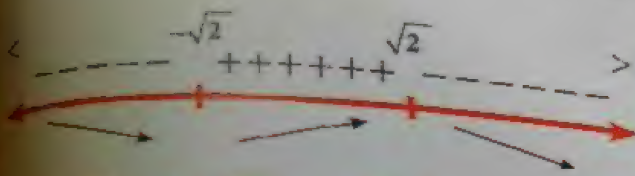
$$6 - 3x^2 = 0 \Rightarrow [3x^2 = 6] \div 3$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow \text{بالجذر } x = \pm \sqrt{2}$$

2

الاحتمالي
التحليلي

تطبيقات التفاضل



$$f(\sqrt{2}) = 6(\sqrt{2}) - (\sqrt{2})^3$$

$$= 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

نقطة نهاية عظمى محلية $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

$$f(-\sqrt{2}) = 6(-\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})^3$$

$$= -6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$$

نقطة نهاية صغرى محلية $(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

$$\{x: x < -\sqrt{2}\}$$

مناطق التناقص

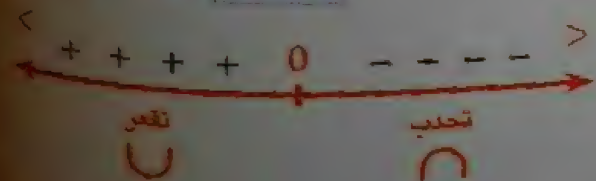
$$\{x: x > \sqrt{2}\}$$

مناطق التزايد في الفترة المفتوحة $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سادساً: التغير والتحدب ونقاط الانقلاب

$$f''(x) = -6x$$

$$-6x = 0 \Rightarrow x = 0$$



$$f''(0) = 6(0) - (0)^2 = 0, (0, 0) \text{ نقطة انقلاب}$$

$$\{x: x > 0\}$$

مناطق التحدب

$$\{x: x < 0\}$$

مناطق التغير

ثالثاً، التناظر:

$$f(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 1)$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \quad \text{تبسيط الدالة}$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2$$

$$= -x^3 + 3x + 2$$

$$= -(x^3 - 3x - 2)$$

$$f(x) \neq f(-x) \quad \text{لا يوجد تناظر}$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

رابعاً، المعاديات:

لا توجد لأن الدالة ليست نسبية

خامساً، النهايات العظمى والصغرى:

$$\bar{f}(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow [3x^2 = 3] \div 3$$

$$x^2 = 1 \quad \text{بالجذر} \Rightarrow x = \pm 1$$



$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$

نقطة نهاية صغرى محلية (1, 0)

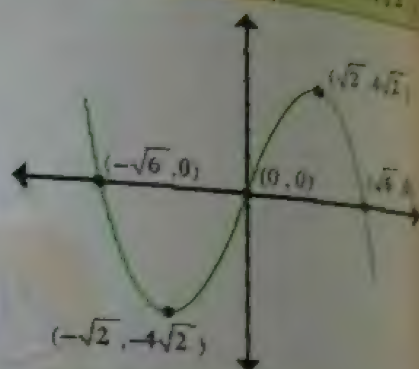
$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2$$

$$= -1 + 3 + 2 = 4$$

نقطة نهاية عظمى محلية (-1, 4)

سابعاً، الجدول والرسم:

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
$\sqrt{6}$	0	$(\sqrt{6}, 0)$
$-\sqrt{6}$	0	$(-\sqrt{6}, 0)$
$\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$
$-\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$



سؤال 7 باستخدام معلوماتك بالتفاضل

$$f(x) = (x+2)(x-1)^2 \quad \text{ارسم منحنى الدالة}$$

مع مجال الدالة R

نقاط التقاطع مع المحاور

مع محور السينات $y = 0$

$$(x+2)(x-1)^2 = 0$$

$$\text{أما } x+2=0 \Rightarrow x=-2, (-2, 0)$$

$$\text{أو } (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1, (1, 0)$$

مع محور الصادات $x=0$

$$f(0) = (0+2)(0-1)^2$$

$$= (2)(1) = 2 \Rightarrow (0, 2)$$

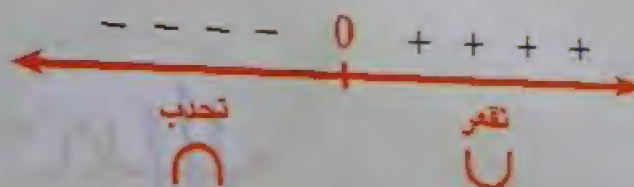
$\{x : x > 1\}$ مناطق التزايد

$\{x : x < -1\}$

مناطق التناقص في الفترة المفتوحة $(-1, 1)$
سادساً، التغير والتحدب ونقاط الانقلاب

$$f'(x) = 6x$$

$$6x = 0 \Rightarrow x = 0$$



$$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$$

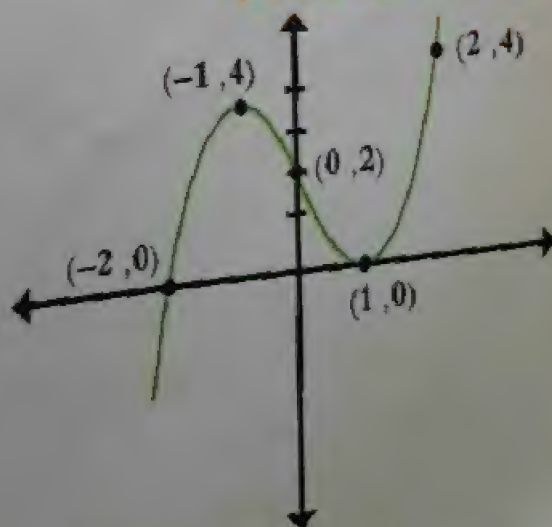
نقطة انقلاب $(0, 2)$

$\{x : x > 0\}$ مناطق التقعر

$\{x : x < 0\}$ مناطق التحدب

سابعاً، الجدول والرسم

x	y	(x, y)
-2	0	(-2, 0)
1	0	(1, 0)
0	2	(0, 2)
-1	4	(-1, 4)
2	4	(2, 4)



إضافية للمساعدة

$$\{x: x > 2\} \cup \{x: x < 0\}$$

مناطق التزايد

مناطق التناقص في الفترة المفتوحة (0, 2)

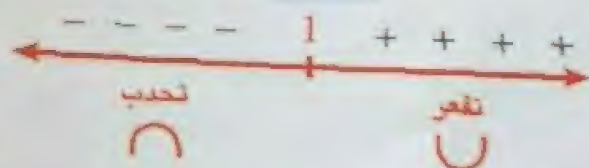
سادساً، التفرع والتعذب ونقاط الانقلاب

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 6x - 6$$

$$6x - 6 = 0$$

$$6x = 6 \Rightarrow x = 1$$



$$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4$$

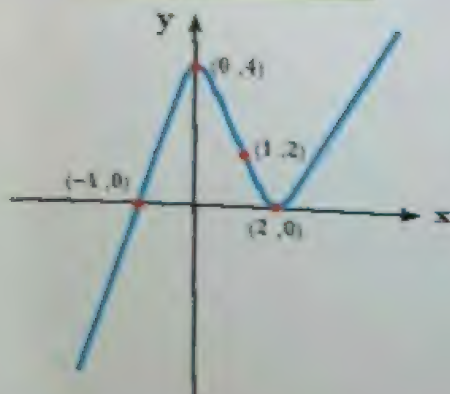
$$= 1 - 3 + 4 = 2 \Rightarrow (1, 2) \text{ نقطة انقلاب}$$

$$\{x: x > 1\} \cup \{x: x < 0\}$$

مناطق التحدب مناطق التفرع

سابعاً، الجدول والرسم:

x	y	(x, y)
0	4	(0, 4)
2	0	(2, 0)
1	2	(1, 2)
-1	0	(-1, 0)



$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

رسم ملحي الدالة

رسم ملحي الدالة R

نقاط التقاطع مع المحاور

$$y = 0$$

مع محور السينات

$$x^3 - 3x^2 = 4 = 0$$

$$x = 0$$

مع محور الصادات

$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 4 \Rightarrow (0, 4)$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$f(-x) = -x^3 - 3x^2 + 4$$

$$= -(x^3 + 3x^2 - 4)$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

لا يوجد تناظر

رابعاً، المعاديات: لا يوجد لأن الدالة ليست نسبية.

خامساً، النهايات العظمى والصغرى:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$[3x^2 - 6x = 0] + 3$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$\text{أما } x = 0$$

$$\text{أو } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$



رسم الدوال النسبية

قبل البدء في الموضوع علينا أن نتذكر ما هي الدالة النسبية
الدالة النسبية: وهي الدالة لها بسط ومقام بشرط يوجد (x) في المقام ذات أس موجب

مثلاً: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

في رسم الدوال النسبية هنالك 7 خطوات

طبعاً كما تعلمنا في السابق في رسم الدوال لكن هنا خطوتين تختلف عما تعلمناه في السابق
سوف نتطرق إليهما.

1 أوسع مجال الدالة:

* نأخذ المقام ونساويه للصفر.

* نجد قيم (x) التي تجعل المقام صفر $\leftarrow R / \{x\}$ للتوضيح

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad x-1=0 \Rightarrow x=1 \rightarrow R / \{1\}$$

ملاحظة

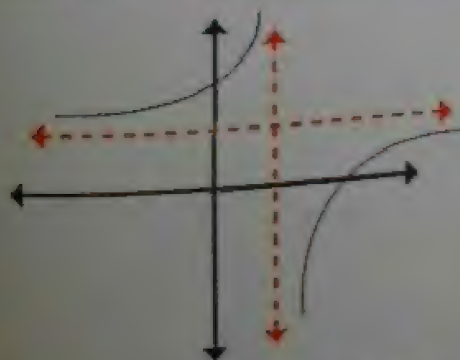
أوسع مجال الدالة النسبية R

يكون المقام مجموع مربعين (رقم $+ x^2$) في هذه الحالة يكتب مباشرة أوسع مجال هو R

2 المعاديات:

المعاديات نوعين:

(1) شاقولي (2) أفقي

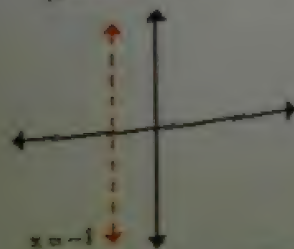


أولاً، المعادي الشاقولي

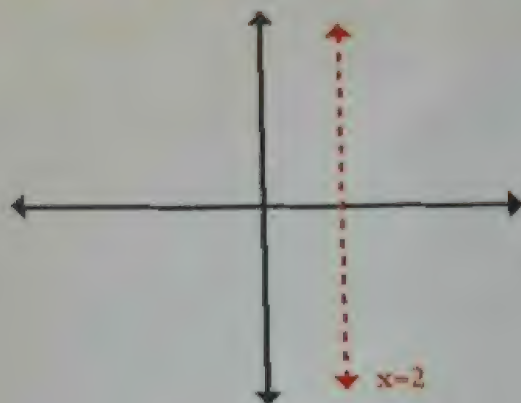
يتم استخراج المعادي الشاقولي عن طريق مساواة المقام للصفر

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1} \rightarrow x+1=0$$

$$x = -1$$



التطبيقات
الاحصائي



مثلاً، $f(x) = \frac{5-x}{2x-4}$

$2x-4=0 \Rightarrow x=2$

لا يوجد محاذي شاقولي إذا كانت مقام الدالة مجموع مربعين كما في المثالين التاليين:

لا يوجد محاذي شاقولي $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$ ، $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$

ثانياً، المحاذي الأفقي: $y = \frac{\text{معامل } x \text{ بالبسط}}{\text{معامل } x \text{ بالمقام}}$ ←

بشرط أن يكون أس x في المقام يساوي أس x في البسط

① $\frac{3x-1}{x+1} \rightarrow y = \frac{3}{1} \rightarrow y = 3$

② $\frac{5-x}{2x-4} = y = \frac{-1}{2}$

لا يكون المحاذي الأفقي $= 0$ عندما أس x في المقام \neq أس x بالبسط.

ملاحظة لاحظ هنا أس x في البسط صفر والمقام واحد وفي المثال الآخر اثنين لذلك المحاذي الأفقي يساوي صفر

$f(x) = \frac{1}{x}$ ، $y = \frac{3}{x^2}$

خامساً، النهايات العظمى والصغرى.

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

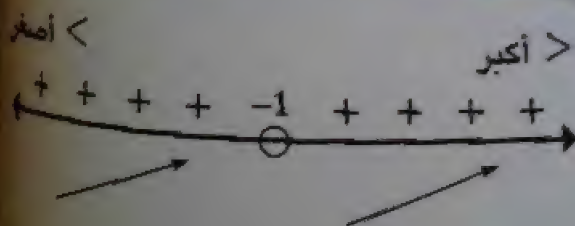
$$\bar{f}(x) = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$$

عندما لا توجد قيمة لـ x فنناقص
خط الأعداد باستخدام قيمة x التي
استخرجناها في أوسع مجال.



∴ الدالة متزايدة دائماً

$$\{x: x < -1\} \cup \{x: x > -1\}$$

مناطق التزايد

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{أرسم منحنى الدالة}$$

$$x+1=0 \quad \text{أو لا، أوسع مجال للدالة}$$

$$x=-1 \quad R / \{-1\}$$

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحاور

$$y=0 \quad \text{مع محور السينات}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = 0 \Rightarrow x-1=0$$

$$x=1 \Rightarrow (1, 0)$$

$$x=0 \quad \text{مع محور الصادات}$$

$$f(0) = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow (0, -1)$$

ثالثاً، التناظر

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1} = \frac{-(x+1)}{-x+1}$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(-x) \neq -f(x) \quad \text{لا يوجد تناظر}$$

رابعاً، المقادير

$$\text{2) الأفقي}$$

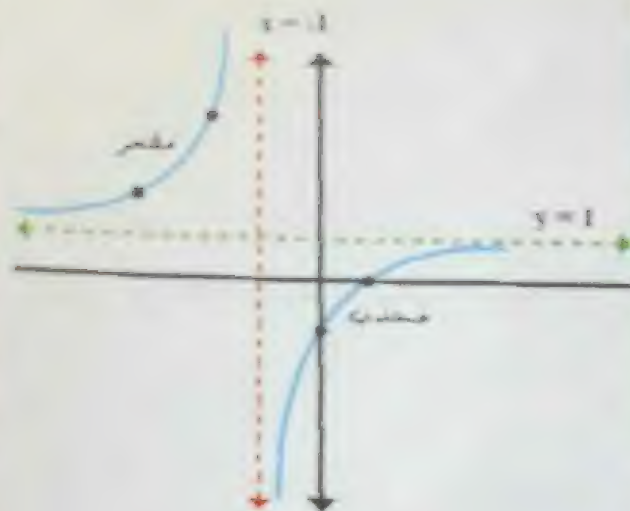
$$f(x) = \frac{1x-1}{1x+1}$$

$$y = \frac{1}{1} \Rightarrow y=1$$

$$\text{1) الشاقولي}$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$



$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(0) - 2[(2)(x+1)(1)]}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

الفحص

$$-4 \neq 0$$



$$\{x : x > -1\}, \{x : x < -1\}$$

مناطق التحذير

مناطق التفكر

ملاحظة: الجدول والرسم

x	y	(x, y)
0	-1	(0, -1)
1	0	(1, 0)
-2	3	(-2, 3)
-3	2	(-3, 2)

الخاصية: نعوض بالمدة الاصلية

تحذير هام جدا

إن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه تحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الأنترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٢ وللمحكمة حق مصادرة المنشآت المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليب والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والطبعة وفق الاتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر المزرمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

خامساً، النهايات العظمى والصغرى،

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{(x+1)(3) - (3x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

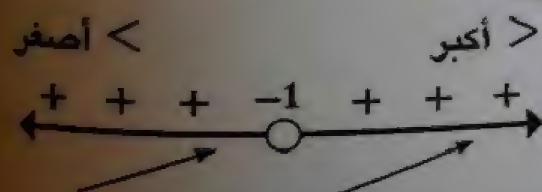
$$\bar{f}(x) = \frac{\cancel{3}x+3-\cancel{3}x+1}{(x+1)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$$

الفحص

$$\frac{4}{(x+1)^2} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow 4 \neq 0$$

عندما لا توجد قيمة لـ x فننا نفحص
خط الاعداد باستخدام قيمة x التي
استخرجناها في اوسع مجال .



∴ الدالة متزايدة دائماً

$$\{x: x > -1\}$$

$$\{x: x < -1\}$$

مناطق التزايد

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$$

سؤال 2 ارسم متغير الدالة

$$x+1=0$$

$$x=-1 \quad \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

أو لا، اوسع مجال للدالة

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحاور

$$y=0$$

1 مع محور السينات

$$\frac{3x-1}{x+1} = 0 \Rightarrow 3x-1=0$$

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$x=0$$

2 مع محور الصادات

$$f(0) = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow (0, -1)$$

ثالثاً، النقاط

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$$

$$f(-x) = \frac{-3x-1}{-x+1} = \frac{-(3x+1)}{-x+1}$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

3 يوجد تناظر

رابعاً، المعادلات

1 الشافولي

2 الافقي

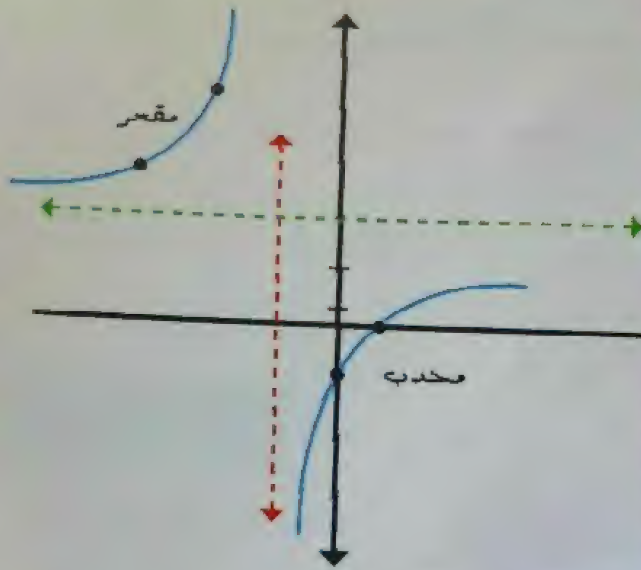
$$f(x) = \frac{3x-1}{1x+1}$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

$$y = \frac{3}{1} \Rightarrow y=3$$

تطبيقات التفاضل الاحصائي والتطبيقي



سادساً: التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$\bar{f}(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$$

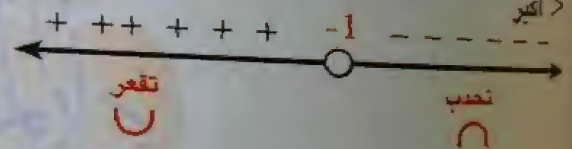
$$\bar{f}'(x) = \frac{(x+1)^2(0) - 4(2)(x+1)^1(1)}{(x+1)^4}$$

$$\bar{f}' = \frac{-8(x+1)}{(x+1)^4} \Rightarrow \bar{f}'(x) = \frac{-8}{(x+1)^3}$$

الفصل

$$\frac{-8}{(x+1)^3} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow -8 \neq 0$$

< أصغر



{x : x > -1} مناطق التحدب

{x : x < -1} مناطق التقعر

سابعاً: الجدول والرسم:

x	y	(x, y)
$\frac{1}{3}$	0	$(\frac{1}{3}, 0)$
0	-1	(0, -1)
-2	7	(-2, 7)
-3	5	(-3, 5)

$$\bar{f}(x) = -x \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{-1}{x^2} \neq 0 \Rightarrow -1 \neq 0 \quad \text{الفحص}$$



الدالة متناقصة دائماً

$$\{x: x < 0\}, \{x: x > 0\}$$

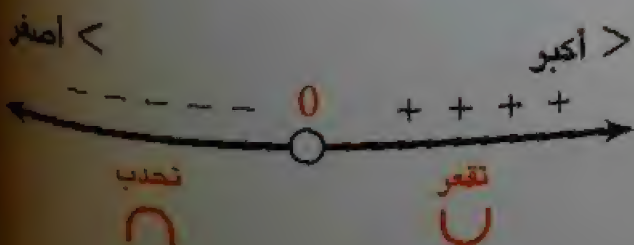
مناطق التناقص

سادساً، التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$\bar{f}(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow \bar{f}(x) = -x^{-2}$$

$$\bar{f}(x) = +2x^{-3} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{2}{x^3} \neq 0 \Rightarrow 2 \neq 0 \quad \text{الفحص}$$



$$\{x: x > 0\}, \{x: x < 0\}$$

مناطق التقعر مناطق التحدب

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ارسم منحنى الدالة}$$

$$x=0 \quad \text{أولاً، أوسع مجال للدالة}$$

$$\mathbb{R} / \{0\} \quad \text{العمل}$$

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحاور

$$y=0 \quad \text{1 مع محور السينات}$$

$$\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0 \quad \text{لا يوجد نقطة تقاطع مع محور السينات}$$

$$x=0 \quad \text{2 مع محور الصادات}$$

$$x=0 \notin \text{مجال الدالة}$$

لا يوجد نقطة تقاطع مع محور الصادات

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ثالثاً، التناظر

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{مناظرة حول نقطة الأصل}$$

رابعاً، المعاديات

$$\text{1 الشاقولي} \quad \text{2 الأفقي}$$

$$x=0 \quad y=0$$

خامساً، النهايات العظمى والصغرى

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = x^{-1} \quad \text{تعديل}$$

سؤال 4 ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

أولاً، أوسع مجال للدالة $(x^2 + 1) \neq 0$

أوسع مجال للدالة هو R

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحورين

1 مع محور السينات $y = 0$

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x^2-1=0$$

$$x = \pm 1 \Rightarrow (-1, 0), (1, 0)$$

2 مع محور الصادات $x = 0$

$$f(0) = \frac{(0)^2-1}{(0)^2+1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$(0, -1)$$

ثالثاً، التناظر: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$f(x) = f(-x)$$

الدالة متناظرة حول محور الصادات

رابعاً، المعاديات

2 الأفقي

$$f(x) = \frac{1x^2-1}{1x^2+1}$$

$$y = \frac{1}{1} \Rightarrow y = 1$$

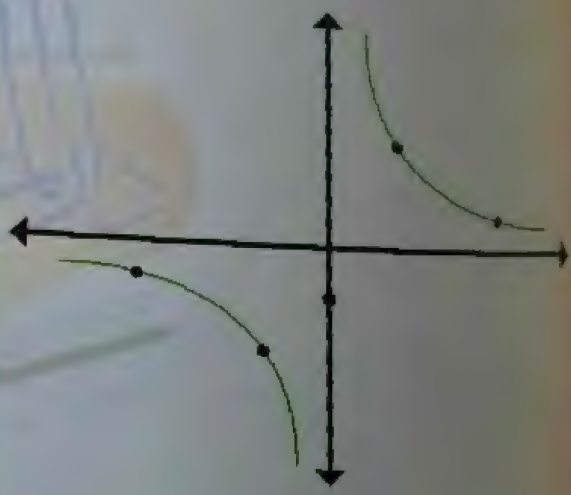
1 الشاقولي

لا يوجد

$$(x^2 + 1) \neq 0$$

سابعاً، الجدول والرسم:

x	y	(x, y)
-2	$-\frac{1}{2}$	$(-2, -\frac{1}{2})$
-1	-1	$(-1, -1)$
1	1	$(1, 1)$
2	$\frac{1}{2}$	$(2, \frac{1}{2})$



Blank lines for additional work or notes.

سادسا، التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$f(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)^2(4) - 4x(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

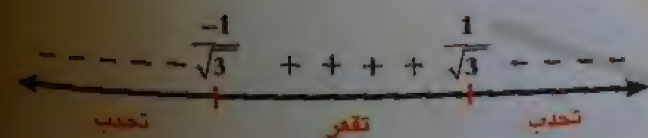
$$f'(x) = \frac{(x^2+1)^1 [4(x^2+1) - 16x^2]}{(x^2+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 4 - 16x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{4 - 12x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow [12x^2 = 4] \div 12$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1}{\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{-1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2}\right) \quad \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2}\right)$$

نقاط الانقلاب

المُسند في الرياضيات

خامسا، النهايات العظمى والصغرى:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2x^2 + 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad \text{الفحص}$$

$$\frac{4x}{(x^2+1)^2} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow [4x = 0] \div 4$$

$$x = 0$$



$$f(0) = \frac{(0)^2 - 1}{(0)^2 + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

نقطة نهاية صغرى محلية (0, -1)

$$\{x: x > 0\} \quad \{x: x < 0\}$$

مناطق تناقص مناطق تزايد

15 / 1997

سؤال 5 ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

أولاً، أوسع مجال للدالة R

لأن $x^2 + 3 \neq 0$

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحورين

(1) مع محور السينات $y = 0$

$$\frac{6}{x^2+3} = 0 \Rightarrow 6 \neq 0$$

لا يوجد نقطة تقاطع مع محور السينات

(2) مع محور الصادات $x = 0$

$$f(0) = \frac{6}{(0)^2+3} = \frac{6}{3} = 2, (0, 2)$$

ثالثاً، التناظر،

$$f(x) = \frac{6}{x^2+3}$$

$$f(-x) = \frac{6}{(-x)^2+3} = \frac{6}{x^2+3}$$

منظرة حول محور الصادات $f(x) = f(-x)$

رابعاً، المحاذيات

(1) الشاقولي

لا يوجد

(2) الأفقي

$$y = 0$$

خامساً، النهايات العظمى والصغرى،

$$\bar{f}(x) = \frac{(x^2+3)(0) - 6(2x)}{(x^2+3)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$$

الفحص

$$\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

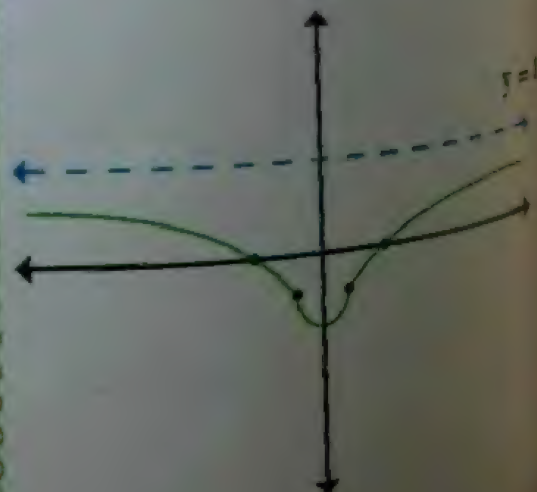
مناطق التحدي

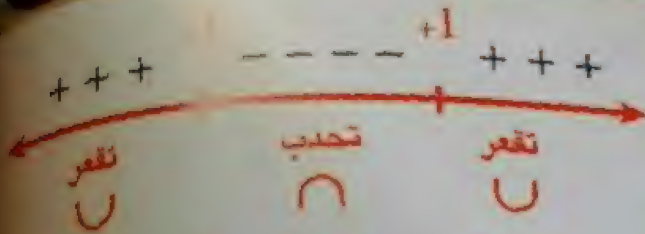
مناطق التفرع في الفترة المفتوحة

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

سجد، الجدول والرسم،

x	y	(x, y)
-1	0	(-1, 0)
1	0	(1, 0)
0	-1	(0, -1)
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$





$$f(1) = \frac{6}{(1)^2 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$f(-1) = \frac{6}{(-1)^2 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\left(-1, \frac{3}{2}\right), \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

نقاط الانقلاب

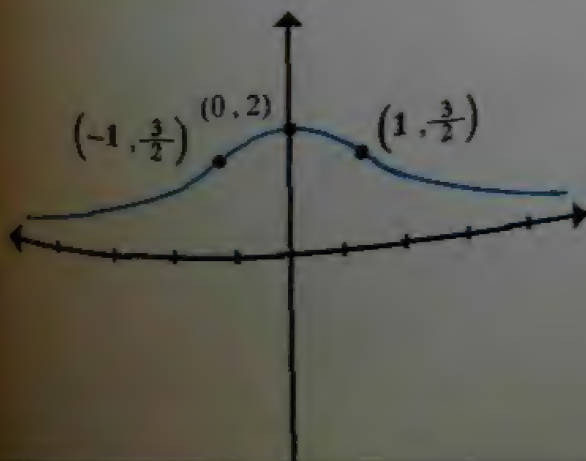
$$\{x : x < -1\}, \{x : x > 1\}$$

مناطق التغير

الدالة محدبة في الفترة المفتوحة $(-1, 1)$
سابقاً، الجدول والرسم:

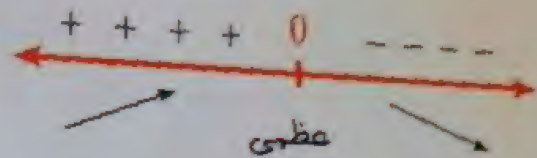
x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
-1	$\frac{3}{2}$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$
1	$\frac{3}{2}$	$\left(1, \frac{3}{2}\right)$
2	$\frac{6}{7}$	$\left(2, \frac{6}{7}\right)$
-2	$\frac{6}{7}$	$\left(-2, \frac{6}{7}\right)$

إضافية
للمساعدة



$$\frac{-12x}{(x^2+3)^2} = 0 \Rightarrow -[12x = 0] \Rightarrow -12$$

$$x = 0$$



$$f(0) = \frac{6}{0^2 + 3} = 2$$

نقطة نهاية عظمى (0, 2)

$$\{x : x > 0\}, \{x : x < 0\}$$

مناطق تناقص مناطق تزايد

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12) - (-12x)(2)(x^2+3)(2x)}{(x^2+3)^4}$$

سادساً، التغير والتحدب ونقاط الانقلاب

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)[-12(x^2+3) + 48x^2]}{(x^2+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-12x^2 - 36 + 48x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3}$$

الفحص

$$\frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3} = 0 \Rightarrow 36x^2 - 36 = 0$$

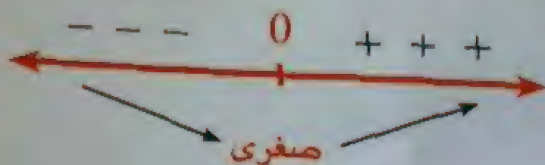
$$x^2 = 1 \Rightarrow \text{بالجذر } x = \pm 1$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

الفحص

$$\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow [2x = 0] \div 2 \Rightarrow x = 0$$



$$f(0) = \frac{(0)^2}{(0)^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

(0, 0) نقطة نهاية صغرى محلية

$$\{x : x > 0\}, \{x : x < 0\}$$

مناطق تناقص مناطق تزايد

سادساً: التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب

$$\bar{f}(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{(x^2 + 1)^2 \cdot 2 - (2x)2(x^2 + 1)^1 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4}$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{(x^2 + 1) [2(x^2 + 1) - 8x^2]}{(x^2 + 1)^4}$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{2 - 6x^2}{(x^2 + 1)^3}$$

الفحص

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

ارسم منحنى الدالة

1. اوجد مجال للدالة R

$$x^2 + 1 \neq 0$$

2. حدد التقاطع مع المحاورين

مع محور السينات $y = 0$

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

(0, 0)

3. مع محور الصادات $x = 0$

$$f(0) = \frac{(0)^2}{(0)^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$f(-x) = f(x)$$

دالة متناظرة حول محور الصادات

4. اوجد المعادلات

2. الافقي

$$y = 1$$

3. المماسي

لا يوجد

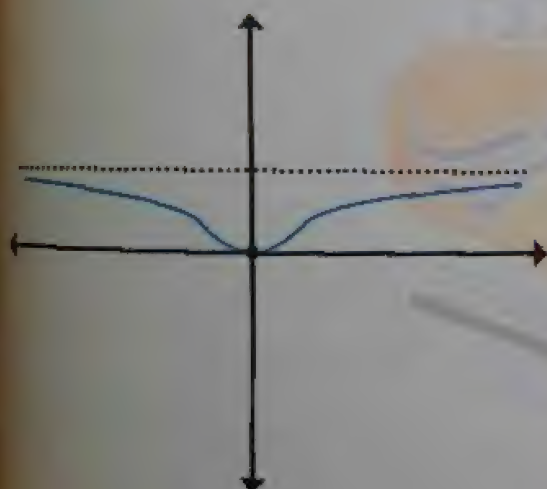
$$x^2 + 1 \neq 0$$

5. حدد النهايات العظمى والصغرى

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{(x^2 + 1)(2x) - x^2(2x)}{(x^2 + 1)^3}$$

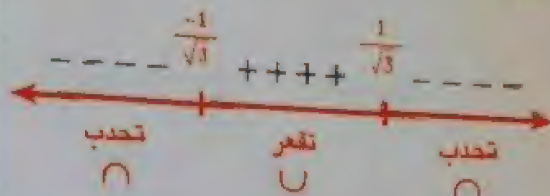
سابعاً، الجدول والرسم

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$
1	$\frac{1}{2}$	$(1, \frac{1}{2})$
-1	$\frac{1}{2}$	$(-1, \frac{1}{2})$



$$\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow 2-6x^2 = 0$$

$$[2=6x^2] \div 6 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3} + 1} = \frac{1}{4}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$$

نقاط انقلاب

$$\left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

مناطق التحدب

مناطق التقعّر في الفترة المفتوحة

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



تطبيقات عملية على النهايات العظمى والصغرى

الرسم + الفرضية

السؤال

مجهول

أكبر ما يمكن / أصظم ما يمكن
أصغر ما يمكن / أقل ما يمكن
أقرب ما يمكن / أبعد ما يمكن

معلوم

(حجم / مساحة / محيط)
[نستخدم قوانين
(حجم / مساحة / محيط)]

(نصف قطر / طول ساق...)
من الرسم نجد علاقة

فيثاغورس

تشابه مثلثان

تعويض

$f(x)$

بعد ان ينتج لنا دالة يتحول السؤال
تلقائيا الى نهايات عظمى و صغرى

1

القاعدة

نبدأ بالمجهول (القانون)

2

علاقة

$x = 4 \text{ cm}$

نعوض في معادلة 2 لاستخراج y

$$y = \frac{16}{x} \Rightarrow y = \frac{16}{4} \Rightarrow y = 4 \text{ cm}$$

نستخرج محيط

$$P = 2(x + y) \Rightarrow P = 2(4 + 4)$$

$P = 16 \text{ cm}$ وهو اقل محيط

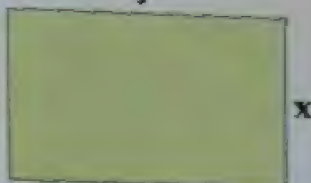
2014 ت ، 2006 د ، 2005 د ، 2017 د / احسان

وأله ما طلعت شمس ولا غربت
إلا وحبك مقرون بأنفاسي
ولا خلوت الح قوم احضهم
إلا وأنت حديثي بين جلاسي
ولا ذكرتك محزوناً ولا فرحاً
إلا وأنت بقلبي بين وسواسي
ولا هممت بشرب الماء من عطش
إلا رأيت خيلاً منك في الكاس

جد اقل محيط ممكن لمستطيل

مساحته 16 cm^2

y



x

نفرض بعدي المستطيل x, y

$A = 16 \text{ cm}^2$

"القاعدة"

محيط المستطيل $P = 2(x + y)$ 1

مساحة المستطيل $A = x \cdot y$

$$[16 = x \cdot y] + x$$

$$y = \frac{16}{x} \dots\dots 2$$

"العلاقة"

نعوض معادلة 2 في 1

الدالة $P = 2\left(x + \frac{16}{x}\right)$

تعديل $P = 2(x + 16x^{-1})$

نشتق الدالة $\bar{P} = 2(1 - 16x^{-2})$

نساويها للصفر $\bar{P} = 0$

$$[2(1 - 16x^{-2}) = 0] \div 2$$

$$\left[1 - \frac{16}{x^2} = 0\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^2 - 16 = 0$$

بالجذر التربيعي $x^2 = 16$

$x = \pm 4$

نهمل لأن البعد لا يكون سالب $x = -4$

$$h = \sqrt{128 - x^2}$$

$$h = \sqrt{128 - 64} \Rightarrow h = 8 \text{ cm}$$

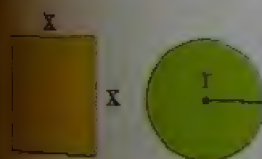
$$A = \frac{1}{2} (2x) (h) \Rightarrow A = xh$$

$$A = (8) (8) = 64 \text{ cm}^2$$

2016/تمهيدي

2017/د 1 / تطبيقي (العدد كان $4\sqrt{2}$)

سؤال 5 مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي 60 أثبت أنه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن فإن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع.



تلميذ، المطلوب في السؤال اثبات أن $2r = x$

نفرض نصف قطر الدائرة $r =$
نفرض طول ضلع المربع $x =$

$$A = A_{\text{دائرة}} + A_{\text{مربع}}$$

$$A = \pi r^2 + x^2 \dots\dots \text{1 "القاعدة"}$$

مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي 60
 $60 = P_{\text{دائرة}} + P_{\text{مربع}}$

$$[2x + 2\pi r = 60] \div 2$$

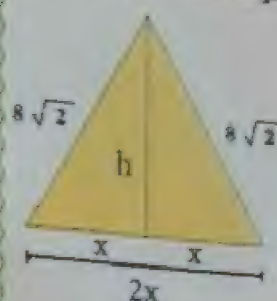
$$2x + \pi r = 30$$

$$[\pi r = 30 - 2x] \div \pi$$

$$r = \frac{30 - 2x}{\pi}$$

$$\dots\dots \text{2 "العلاقة"}$$

سؤال 4 جد أكبر مساحة لهثلك متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2} \text{ cm}$



نفرض الارتفاع $h =$
نفرض طول القاعدة $2x =$

$$A = \frac{1}{2} (2x) (h)$$

$$A = (x) (h) \dots\dots \text{1 "القاعدة"}$$

$$x^2 + h^2 = (8\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + h^2 = 128$$

$$h^2 = 128 - x^2$$

$$h = \sqrt{128 - x^2} \dots\dots \text{2 "العلاقة"}$$

نعوض معادلة 2 في 1

$$A = x \cdot \sqrt{128 - x^2}$$

$$A = \sqrt{x^2 (128 - x^2)}$$

$$A = \sqrt{128x^2 - x^4} \text{ الدالة}$$

$$\bar{A} = \frac{256(x) - 4x^3}{2\sqrt{128x^2 - x^4}} \text{ المشتقة}$$

$$[256x - 4x^3 = 0] \div 4$$

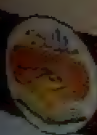
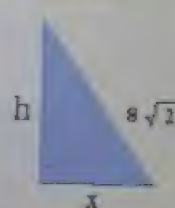
$$64x - x^3 = 0 \text{ عامل مشترك}$$

$$x(64 - x^2) = 0$$

$$\text{أما } x = 0$$

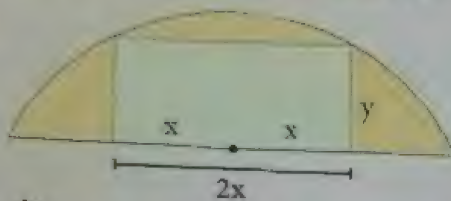
$$\text{أو } 64 - x^2 \Rightarrow x^2 = 64$$

$$x = 8 \text{ cm}$$



سؤال 6 جد بُعدي الكبر مستطيل يوضح

داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}$ cm



نفرض بعدي المستطيل $2x, y$

$A = 2x \cdot y$ 1 "القاعدة"

$x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2$

$x^2 + y^2 = 32 \Rightarrow y^2 = 32 - x^2$ بالجذر التربيعي

$y = \sqrt{32 - x^2}$ 2 "العلاقة"

نعوض معادلة 2 في 1

$A = 2x \sqrt{32 - x^2}$

$A = 2 \sqrt{32x^2 - x^4}$

الدالة

$\bar{A} = \cancel{2} \frac{64x - 4x^3}{\cancel{2} \sqrt{32x^2 - x^4}}$ المشتقة

$[64x - 4x^3 = 0] \div 4 \Rightarrow 16x - x^3 = 0$

$x(16 - x^2) = 0$

1- $x = 0$ 2- $16 - x^2 = 0$

$16 = x^2 \Rightarrow x = 4$ cm

$y = \sqrt{32 - x^2} = \sqrt{32 - 16} = \sqrt{16}$

$y = 4$ cm

بعدي المستطيل

$2x = 2(4) = 8$ cm

$y = 4$ cm

1 في $A = \pi \left(\frac{30-2x}{\pi} \right)^2 + x^2$

$A = \pi \cdot \frac{(30-2x)^2}{\pi^2} + x^2$

$A = \frac{1}{\pi} (900 - 120x + 4x^2) + x^2$

$\bar{A} = \frac{1}{\pi} (-120 + 8x) + 2x$

$\left[\frac{1}{\pi} (-120 + 8x) + 2x = 0 \right] \cdot \pi$

$-120 + 8x + 2\pi x = 0$

$[8x + 2\pi x = 120] \div 2$

$4x + \pi x = 60 \Rightarrow x(4 + \pi) = 60$

$x = \frac{60}{4 + \pi}$ cm

2 معادلة

$r = \frac{(30-2x)}{\pi} \Rightarrow r = \frac{1}{\pi} (30-2x)$

$r = \frac{1}{\pi} \left(30 - 2 \cdot \frac{60}{\pi+4} \right)$

$r = \frac{1}{\pi} \left(30 - \frac{120}{\pi+4} \right)$

$r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{30\pi + 120 - 120}{\pi + 4}$

$r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{30\pi}{\pi+4} \Rightarrow r = \frac{30}{\pi+4}$ cm

$2r = \frac{60}{\pi+4} = x$

طريقة

لقد تم السؤال بطريقة الهندسة القديم عندما يقول :
 "صنع منها دائرة ومربع ، اثبت
 مساحتهما متساويتان"
 هذا السؤال من أسئلة الرياضيات القديمة
 التي تثير الدائرة بمساوي طول ضلع المربع .

1د/2012

ت/2013

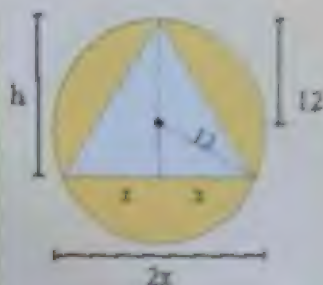
1د/2009

4د/2015

1د/2016

سؤال 7 جد بعدي الهرم مثلث متساوي الساقين يمكن ان يوضع داخل دائرة نصف قطرها 12cm ثم برهن ان نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

التحليل



2003
2006
2010
2012 خارج القصر

$$[72h^2 - 4h^4 = 0] + 4$$

$$18h^2 - h^4 = 0$$

$$h^2(18 - h) = 0$$

$$h^2 = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ (بمهل)}$$

$$18 - h = 0 \Rightarrow h = 18 \text{ cm}$$

نعوض بالمعاقبة

$$x = \sqrt{24h - h^2}$$

$$x = \sqrt{24(18) - (18)^2}$$

$$x = \sqrt{432 - 324} = \sqrt{108}$$

$$x = \sqrt{36 \times 3} \Rightarrow x = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{طول القاعدة } 2x = 12\sqrt{3} \text{ cm}$$

نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة

$$A = \frac{1}{2} (2x) (h) = (6\sqrt{3}) (18)$$

$$A = 108\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A = \pi r^2 = \pi (12)^2 = 144\pi \text{ cm}^2$$

$$\frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{108\sqrt{3}}{144\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

نتيجة

قد يقول جد مساحة الهرم مثلث متساوي الساقين
استخرج بعدين سوف نقوم باستخراج
المساحة.

h = نرض ارتفاع المثلث بـ h

2x = نرض طول القاعدة بـ 2x

$$A = \frac{1}{2} (2x) (h)$$

$$A = x \cdot h \text{ 1 (القاعدة)}$$

$$h-12 \quad x \quad 12 \quad x^2 + (h-12)^2 = (12)^2$$

$$x^2 + h^2 - 24h + 144 = 144$$

$$x^2 + h^2 - 24h = 0$$

$$x^2 = 24h - h^2 \text{ بالجذر}$$

$$x = \sqrt{24h - h^2} \text{ 2 (العلاقة)}$$

نعوض معادلة 2 في 1

$$A = x \cdot h$$

$$A = \sqrt{24h - h^2} \cdot h$$

$$A = \sqrt{24h^2 - h^3} \text{ الدالة}$$

$$A' = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^2 - h^3}} \text{ المشتقة}$$

سؤال 9 جد ارتفاع البر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}$



نفرض نصف القطر $r =$
نفرض الارتفاع $2h =$

$$V = \pi r^2 \cdot 2h \quad \text{..... 1 "القاعدة"}$$

$$r^2 + h^2 = (4\sqrt{3})^2$$

$$r^2 + h^2 = 48$$

$$r^2 = 48 - h^2 \quad \text{..... 2 "العلاقة"}$$

نعوض معادلة 2 في 1

$$V = 2\pi (48 - h^2) \cdot h$$

$$V = 2\pi (48h - h^3) \rightarrow \text{الدالة}$$

$$\bar{V} = 2\pi (48 - 3h^2) \rightarrow \text{المشتقة}$$

$$[2\pi (48 - 3h^2) = 0] \div 2\pi$$

$$48 - 3h^2 = 0 \Rightarrow [48 = 3h^2] \div 3$$

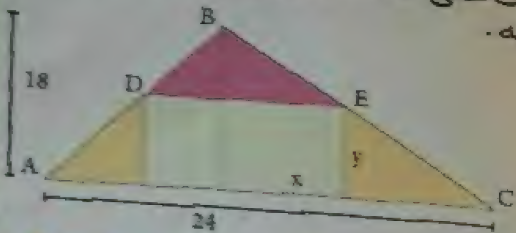
$$h^2 = 16 \xrightarrow{\text{بالجذر}} h = 4$$

3د/2012

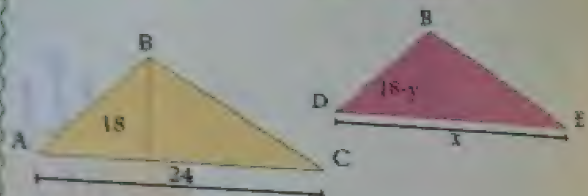
$$\text{الارتفاع} = 2h = 8 \text{ cm}$$

يجب أن تضرب h في 2 لأنه
تم فرضه $2h$

سؤال 8 جد بعدي البر مستطيل يمكن أن يوضع داخل مثلث طول قاعدته 24cm وارتفاعه 18cm بحيث أن رأسين متجاورين تقعان على القاعدة والرأسين الباقين على ساقيه.



$$A = x \cdot y \quad \text{..... 1 "القاعدة"}$$



من تشابه المثلثين ABC, DBE

$$\frac{24}{x} = \frac{18}{18-y}$$

$$[18x = 24(18-y)] \div 18$$

$$x = \frac{24(18-y)}{18} \Rightarrow x = \frac{4}{3}(18-y) \quad \text{..... 1 "العلاقة"}$$

$$A = x \cdot y$$

$$A = \frac{4}{3}(18-y) \cdot y$$

$$A = \frac{4}{3}(18y - y^2) \quad \text{الدالة}$$

$$\bar{A} = \frac{4}{3}(18-2y) \Rightarrow \left[\frac{4}{3}(18-2y) = 0 \right] \cdot \frac{3}{4}$$

$$18-2y = 0 \Rightarrow 18 = 2y \Rightarrow y = 9 \text{ cm}$$

$$x = \frac{4}{3}(18-9)$$

$$x = \frac{4}{3}(9) \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

2د/2013

تمهيدي/2015

جد حجم البر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 3cm

سؤال 10

$$[12h - 3h^2 = 0] \div 3$$

$$4h - h^2 = 0$$

$$h(4 - h) = 0$$

أ) $h = 0$

يُهمل

ب) $4 - h = 0 \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$

2 نعوض بمعادلة

$$r^2 = 6h - h^2$$

$$r^2 = 6(4) - (4)^2$$

$$r^2 = 24 - 16$$

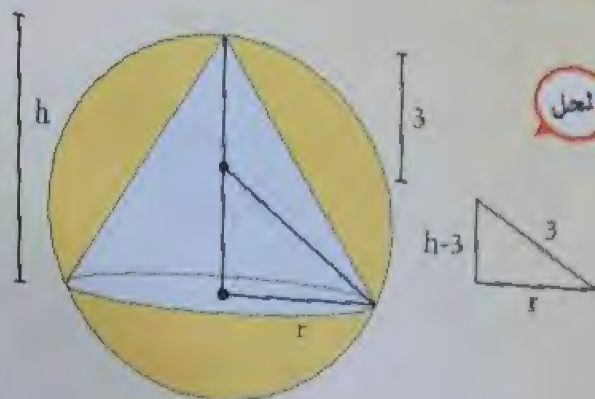
$$r^2 = 8$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (8) (4)$$

$$V = \frac{32 \pi}{3} \text{ cm}^3$$

12/2008



الحل

$r =$ نصف القطر

$h =$ الارتفاع

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \dots\dots 1 \text{ "القاعدة"}$$

$$(h-3)^2 + r^2 = (3)^2$$

$$h^2 - 6h + 9 + r^2 = 9$$

$$r^2 = 6h - h^2 \dots\dots 2 \text{ "العلاقة"}$$

• نعوض العلاقة في القاعدة

$$V = \frac{\pi}{3} (6h - h^2) \cdot h$$

$$V = \frac{\pi}{3} (6h^2 - h^3) \rightarrow \text{الدالة}$$

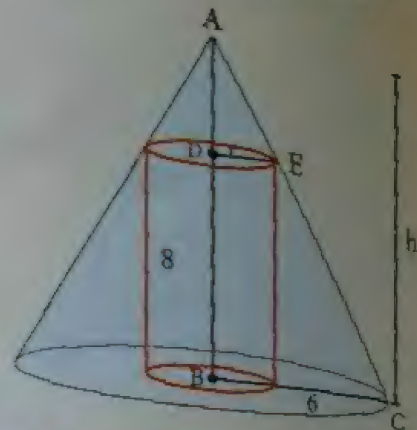
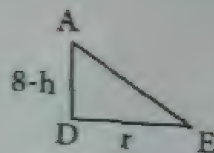
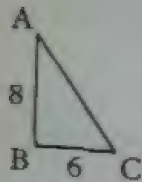
$$\bar{V} = \frac{\pi}{3} (12h - 3h^2) \rightarrow \text{المشتقة}$$

$$\left[\frac{\pi}{3} (12h - 3h^2) = 0 \right] \times \frac{3}{\pi}$$

جد أبعاد أكبر أسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8cm وطول قطر قاعدته 12cm.

$r =$ نفرض نصف القطر

$h =$ نفرض الارتفاع



الحل

$$\bar{V} = \frac{\pi}{3} (48r - 12r^2)$$

$$\left[\frac{\pi}{3} (48r - 12r^2) = 0 \right] \cdot \frac{3}{\pi}$$

$$[48r - 12r^2 = 0] \div 12$$

$$4r - r^2 = 0$$

$$r(4-r) = 0$$

١- $r = 0$ يُهمل

٢- $4-r=0 \Rightarrow r=4$ cm

$$h = \frac{24-4r}{3}$$

$$h = \frac{24-4(4)}{3} = \frac{24-16}{3}$$

$$h = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

$$V = \pi r^2 h \dots\dots 1$$

ABC , ADE

$$\frac{8}{8-h} = \frac{6}{r} \text{ من تشابه المثلثين}$$

$$8r = 6(8-h)$$

$$8r = 48 - 6h$$

$$[6h = 48 - 8r] \div 2$$

$$[3h = 24 - 4r] \div 3$$

$$h = \frac{24-4r}{3} \dots\dots 2$$

نعوض العلاقة في القاعدة

$$V = \pi r^2 \left(\frac{24-4r}{3} \right)$$

$$V = \frac{\pi}{3} (24r^2 - 4r^3)$$

إذا طلب نقطة أقرب ما يمكن لنقطة أخرى نستخدم قانون البعد بين نقطتين $S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ لنجد القاعدة

ملاحظة

كل علاقة في السؤال سواء كانت معادلة قطع أو دالة $f(x)$ أو أي معادلة لمنحني آخر هي العلاقة.

ملاحظة

$$\frac{4y - 8}{2\sqrt{2y^2 - 8y + 13}} = 0$$

$$4y - 8 = 0$$

$$[4y = 8] \div 4 \Rightarrow y = 2$$

$$x^2 = y^2 - 3 \quad \text{تعويض معادلة 2}$$

$$x^2 = 4 - 3 \Rightarrow x^2 = 1 \quad \text{بالبجذر}$$

$$x = \pm 1$$

$$P_1(1, 2), P_2(-1, 2)$$

2د/2011

2012/تمهيدي

1د/2013

2016/2د/خ

سؤال 12 جد نقطة أو نقاط تنتمي إلى القطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0, 4)$.

نفرض النقطة $P(x, y)$ x_1, y_1 x_2, y_2 $(0, 4)$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 4)^2}$$

"القاعدة"

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} \quad \text{..... 1}$$

$$y^2 - x^2 = 3 \Rightarrow y^2 - 3 = x^2$$

$$x^2 = y^2 - 3 \quad \text{..... 2 "العلاقة"}$$

نعوض العلاقة في القاعدة

$$S = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16}$$

$$S = \sqrt{2y^2 - 8y + 13} \quad \text{الدالة}$$

$$\bar{S} = \frac{(4y - 8)}{2\sqrt{2y^2 - 8y + 13}}$$

2 ج

والاحيائي
التطبيقي

تطبيقات التفاضل

جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن.

سؤال 14

نفرض العدد الأول $x =$

نفرض العدد الثاني $y =$

1 "القاعدة" $m = x \cdot y^2$

$x + y = 75$

2 "العلاقة" $x = 75 - y$

نعوض العلاقة في الدالة

$m = (75 - y) \cdot y^2$ 2008/4د أنبار

الدالة $m = 75y^2 - y^3$

$m = 150y - 3y^2$

$[150y - 3y^2 = 0] \div 3$

$50y - y^2 = 0$

$y(50 - y) = 0$

أ $y = 0$ يُهمل

ب $50 - y = 0$

$y = 50$

$x = 75 - y$

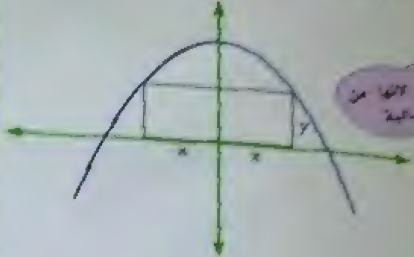
$x = 75 - 50$

$x = 25$

فكر
إذا كانت $y + 4x = 24$
حدفيمتي y و x
التي تجعل yx^2
أكبر ما يمكن.
ج $x = 4$ و $y = 8$

فكر
جد العدد الذي
أضيفت اليه نظيرة
الضرب يكون
النتيجة أكبر ما يمكن
ج -1

سؤال 13
جد بعدي المستطيل
يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x) = 12 - x^2$ كمحور السينات رأسات من رؤسها على المنحني والرأسات الأخرى على محور السينات ثم جد محيطه.



محور السينات هو المحور الأفقي والمحور
الordinat هو المحور العمودي

نفرض بعدي المستطيل $2x$ و y

$A = 2x \cdot y$

$f(x) = 12 - x^2$

$y = 12 - x^2$

$A = 2x(12 - x^2)$

$A = 24x - 2x^3$

$A = 24 - 6x^2$

$24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow [24 = 6x^2] \div 6$

بالجذر $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

$\therefore y = 12 - x^2 \Rightarrow y = 12 - (2)^2$

$y = 8$

بعدي المستطيل $2x$ و y

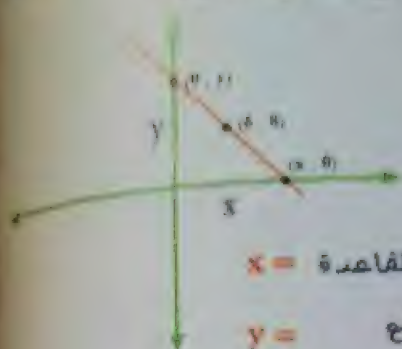
4 و 8

محيط المستطيل $P = 2(2x + y)$

$P = 2(4 + 8)$

وحدة طول $P = 24$

سؤال 16 جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (6, 8) والذي يقطع المحاور في الربيع الأول أصغر مثلث.



$x =$ فرض طول القاعدة
 $y =$ فرض الارتفاع

$A = \frac{1}{2} x \cdot y$ 1 "القاعدة"

$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $(0, y), (6, 8)$

$m_1 = \frac{8 - y}{6 - 0} = \frac{8 - y}{6}$

$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $(6, 8), (x, 0)$

$m_2 = \frac{8 - 0}{6 - x} = \frac{8}{6 - x}$

$\frac{8 - y}{6} = \frac{8}{6 - x}$, $m_1 = m_2$

$(8 - y)(6 - x) = 48$

$48 - 8x - 6y + xy = 48$

$xy = 8x + 6y$ 2 "العلاقة"

سؤال 15 جد العدد الذي إذا أضيفه إلى مربعه يكون الناتج أصغر ما يمكن.

$x =$ فرض العدد

$x^2 =$ فرض مربع العدد

$m = x + x^2$ الدالة

$m = 1 + 2x$ المشتقة

$1 + 2x = 0$

$[2x = -1] \div 2$

$x = \frac{-1}{2}$

فكر
جد العدد الذي
يضافه على مربعه
النتيجة ما يمكن
أن تكون

ملاحظة

لايجاد معادلة المستقيم

نقطة (x_1, y_1) ميل m $y - y_1 = m(x - x_1)$

المشتقة = الميل

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

سؤال 17 صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها 12cm وذلك بقص أربع مربعات متساوية الأبعاد من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة منها فما هو الحجم الأعظم للعلبة ؟



الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

$$V = (12 - 2x)(12 - 2x)(x)$$

$$V = (144 - 24x - 24x + 4x^2) \cdot x$$

$$V = (144 - 48x + 4x^2) \cdot x$$

$$V = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

$$\bar{V} = 144 - 96x + 12x^2$$

$$[12x^2 - 96x + 144 = 0] \div 12$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \quad \text{تحريه}$$

$$(x - 6)(x - 2) = 0$$

$$\text{أ) } x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \quad \text{يُصل}$$

$$\text{ب) } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$V = (12 - 2x)(12 - 2x)(x)$$

$$V = (12 - 2(2))(12 - 2(2))(2)$$

$$V = (8)(8)(2)$$

$$V = 128 \text{ cm}^3 \quad \text{الحجم الأعظم للعلبة}$$

* $x = 6$ يُهمل لأن عنده الحجم سوف يكون صفراً.

موضوع معادلة 2 في 1

$$A = \frac{1}{2} (x + y)$$

$$A = \frac{1}{2} (8x + 6y)$$

$$A = 4x + 3y \Rightarrow \text{علاقة صينية}$$

$$\bar{A} = 4 + 3 \bar{y}$$

$$4 + 3 \bar{y} = 0 \Rightarrow [3 \bar{y} = -4] + 3$$

$$\bar{y} = \frac{-4}{3} \therefore m = \frac{-4}{3}$$

$$(6, 8) \quad m = \frac{-4}{3}$$

$$y - y_1 = m (x - x_1) \quad \text{قانون الميل}$$

$$\left[y - 8 = \frac{-4}{3} (x - 6) \right] * 3$$

$$3y - 24 = -4x + 24$$

$$4x + 3y - 48 = 0$$

تحذير هام جداً

المطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مسجلة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات يعاقب بها التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهلنا وفق القانون العرفي الرقم 21 لسنة 1957 والمعدل برقم 80 في سنة 1964 والمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع الواسعة المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما يصدر من مطبعة هو جهد وإجتهاد شخصي من الأستاذ والمطبعة وفق الاتفاق المبرم وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

سؤال 18

خزائن على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فإن كانت مساحة البعد المستخدم في صناعته 108 cm^2 جد أبعاد الخزائن لكي يكون حجمه أكبر ما يمكن عليها أن الخزائن ذو غطاء كامل.

تكملة الحل

$$V = \frac{2}{3} (54 - 6x^2)$$

$$\left[\frac{2}{3} (54 - 6x^2) = 0 \right] \cdot \frac{3}{2}$$

$$54 - 6x^2 = 0 \Rightarrow [54 = 6x^2] \div 6$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \text{بالجذر } x = 3 \quad \text{نعوضها في 2}$$

$$h = \frac{54 - 2(3)^2}{3(3)} = \frac{54 - 18}{9} = \frac{36}{9}$$

$$h = 4 \text{ cm} \quad \text{الارتفاع}$$

$$2x = \text{طول القاعدة}$$

$$6 \text{ cm} = \text{طول القاعدة}$$



$$h = \text{نفرض ارتفاع الخزائن}$$

$$x = \text{نفرض عرض القاعدة}$$

$$2x = \text{طول القاعدة}$$

حجم متوازي السطوح المستطيلة = الطول \times العرض \times الارتفاع

$$V = (2x) \cdot (x) \cdot (h)$$

$$V = 2x^2 \cdot h \quad \text{القاعدة}$$

$$A = 2(2x + x) \cdot h + (2x)(x) \cdot 2$$

$$A = 6x \cdot h + 4x^2$$

$$[108 = 6x \cdot h + 4x^2] \div 2$$

$$54 = 3x \cdot h + 2x^2$$

$$[54 - 2x^2 = 3xh] \div 3x$$

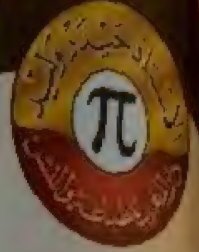
$$h = \frac{54 - 2x^2}{3x} \quad \text{نعوض العلاقة في القاعدة}$$

$$V = 2x^2 \cdot h \Rightarrow V = 2x^2 \cdot \frac{54 - 2x^2}{3x}$$

$$V = \frac{2}{3} (54x - 2x^3) \quad \text{الدالة}$$

المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

Nots:



المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

Nots:



المُسْنَد حيدر وليد

المُسْنَد فِي الرِّيَاضِيَّاتِ



2021

4

التكامل

الفصل الرابع

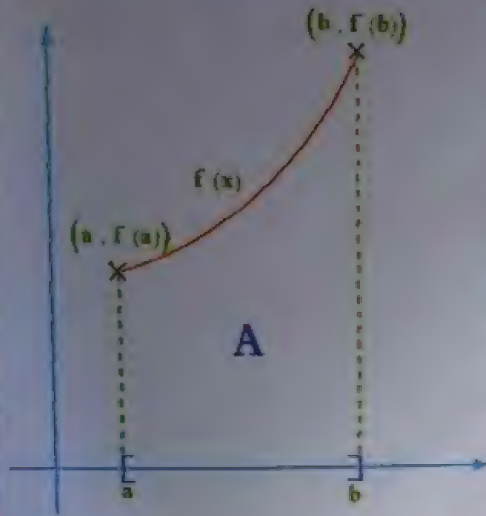
الأحيائي و التطبيقي

07702729223

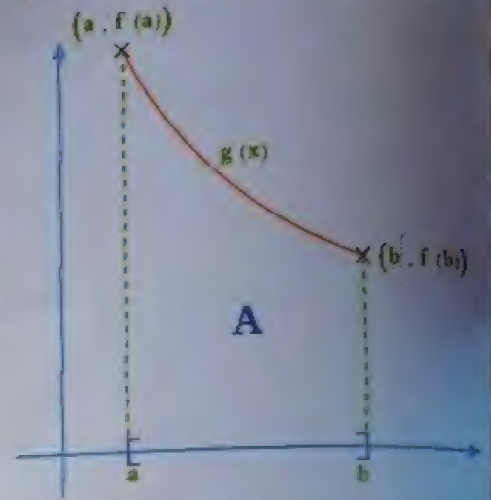


ملازم دار المغرب

ملاحظة :- من صفحة 139 الى صفحة 147 (خاص بالتطبيقي)

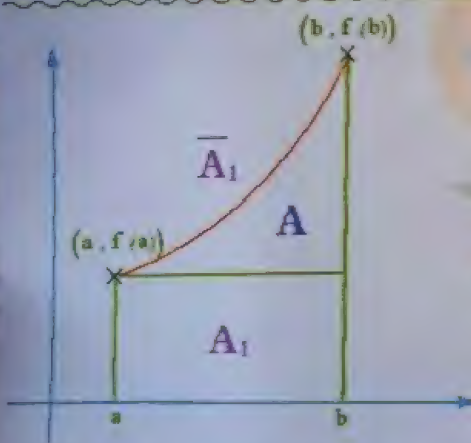


خاص
بالتطبيقي
2021

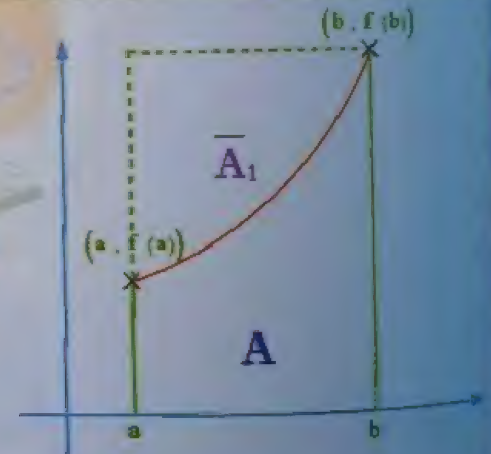


الدالة $f(x)$ متزايدة ضمن الفترة المغلقة $[a, b]$ وهذا يعني $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ ولا توجد نقطة حرجة.

الدالة $g(x)$ متناقصة ضمن الفترة المغلقة $[a, b]$ وهذا يعني $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$ ولا توجد نقطة حرجة.



خاص
بالتطبيقي
2021



A_1 أكبر مستطيل ممكن رسمه خارج المنطقة A وتحت المنحنى.

\bar{A}_1 أصغر مستطيل ممكن رسمه خارج المنطقة A وفوق المنحنى.

ملاحظة لحساب مساحة منطقة مستوية A محصورة بين منحنى دالة ومحور السينات وضمن فترة محددة عبر قبة المساحة A_1 والتي تساوي مساحة أكبر مستطيل داخل المنطقة A وتحت المنحنى ومساحة المنطقة \bar{A}_1 والتي تساوي مساحة أصغر مستطيل خارج المنطقة A وفوق المنحنى ويكون:

$$A = \frac{A_1 + \bar{A}_1}{2}$$

حيث A_1 المساحة تحت المنحنى
 \bar{A}_1 المساحة فوق المنحنى

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث

$$A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, y = x^2 + 1\}$$

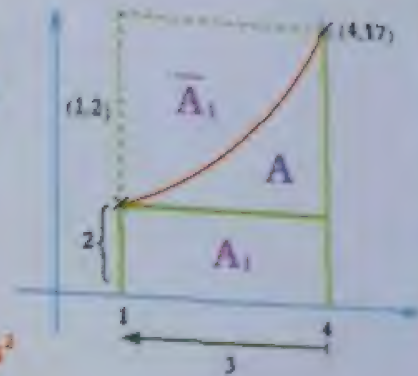
$$\begin{aligned} x=1 & \Rightarrow y=2 & (1,2) \\ x=4 & \Rightarrow y=17 & (4,17) \end{aligned}$$



مساحة المنطقة A_1 تحت المنحنى $= (3)(2) = 6 \text{ unites}^2$

مساحة المنطقة \bar{A}_1 فوق المنحنى $= 3(17) = 51 \text{ unites}^2$

$$A = \frac{A_1 + \bar{A}_1}{2} = \frac{6 + 51}{2} = 28 \frac{1}{2} \text{ unites}^2$$



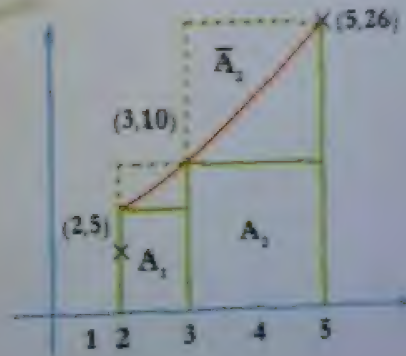
ملاحظة

يمكن الحصول على دقة أكبر في حساب المساحة A وذلك بزيادة عدد المستطيلات داخل المنطقة A وخارجها ويتم ذلك من خلال تجزئة الفترة بالجزئ σ كما في الأمثلة التالية:

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث

$$\sigma = (2,3,5) \quad A = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 5, y = x^2 + 1\}$$

$$\begin{aligned} x=2 & \Rightarrow y=5 \\ x=3 & \Rightarrow y=10 \\ x=5 & \Rightarrow y=26 \end{aligned}$$



مجموع مساحات المناطق المستطيلة تحت المنحنى $m = A_1 + A_2 = (1 \times 5) + (2 \times 10) = 5 + 20 = 25 \text{ unit}^2$

مجموع مساحات المناطق المستطيلة فوق المنحنى $M = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 = (1 \times 10) + (2 \times 26) = 10 + 52 = 62 \text{ unit}^2$

$$A = \frac{25 + 62}{2} = 43 \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$

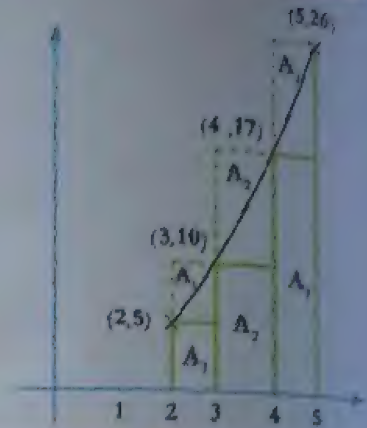
أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث

$$A = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 5, y = x^2 + 1\}, \sigma = (2, 3, 4, 5)$$

$$\begin{aligned} m &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= 5 + 10 + 17 \\ &= 32 \text{ unit}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 \\ &= 10 + 17 + 26 \\ &= 53 \text{ unit}^2 \end{aligned}$$

$$A \text{ المساحة} = \frac{m + M}{2} = \frac{32 + 53}{2} = 42 \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$



المجاميع العليا والمجاميع السفلى

المجاميع السفلى ويرمز لها $L(\sigma, f)$ وتساوي مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل المنطقة (تحت المنحني).

المجاميع العليا ويرمز لها $U(\sigma, f)$ وتساوي مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل المنطقة (فوق المنحني).

بالمكان الآت حساب المساحات وذلك بإيجاد $U(\sigma, f)$, $L(\sigma, f)$ حيث

$$A = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2}$$

ويتم ذلك بعمل جدول مؤلف من الحقول التالية:

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
---------	------------	-------	-------	----------------	----------------

لتكن $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 5 - 2x$

فأنا أن $\sigma = (0, 1, 3, 5)$ فاوجد المجموع الأسفل $L(\sigma, f)$ والمجموع الأعلى $U(\sigma, f)$

∴ الدالة متناقصة ولاتوجد نقطة حرجة $f'(x) = -2 < 0$

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
[0, 1]	1	3	5	3	5
[1, 3]	2	-1	3	-2	6
[3, 5]	2	-5	-1	-10	-2

$$L(\sigma, f) = -9 \quad U(\sigma, f) = 9$$

المساحات دائياً موجبة ولا يمكن ان تكون سالبة. وعليه في المثال السابق
إذا اردنا إيجاد المساحة فالقيم السالبة في الحقلين $L(\sigma, f)$ و $U(\sigma, f)$ نجعل موجبة مثلاً -2 نجعل 2 و -10 نجعل 10

مهمة

إذا كانت $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - x^2$ وذلك باستخدام أربعة تجزيات منتظمة.

مثال

$$f(x) = 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in [1, 2]$$

$$f(x) = 2 \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \quad f(2) = 2$$

الحل

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[0, 1]$	1	0	2	0	2
$[1, 2]$	1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$
$[2, 3]$	1	0	2	0	2
$[3, 4]$	1	-4	0	-4	0
				-2	$6\frac{1}{4}$

خاص
بالتطبيقي
2021

$$\therefore L(\sigma, f) = -2 \quad U(\sigma, f) = 6\frac{1}{4}$$

تمارين (4-1)

خاص
بالتطبيقي
2021

أوجد كل من $U(\sigma, f)$, $L(\sigma, f)$ إذا كانت

سؤال 1

$f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x$ مقسماً الفترة الى ثلاث فترات جزئية منتظمة.

الحل

\therefore الدالة متناقصة ولا توجد نقطة حرجية $f'(x) = -1 < 0$

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[-2, -1]$	1	4	5	4	5
$[-1, 0]$	1	3	4	3	4
$[0, 1]$	1	2	3	2	3
				9	المجموع = 12

$$\therefore L(\sigma, f) = 9 \quad U(\sigma, f) = 12$$

التكامل
السادس
التطبيقي

2

أوجد كل من $U(\sigma, f)$, $L(\sigma, f)$ إذا كانت
حيث $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - x^2$
إذا كانت $\sigma = (1, 2, 3, 5)$

$$\bar{f}(x) = 4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$$

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[1, 2]$	1	3	4	3	4
$[2, 3]$	1	3	4	3	4
$[3, 5]$	2	-5	3	-10	6
				-4	14

$$\therefore L(\sigma, f) = -4 \quad U(\sigma, f) = 14$$

في هذا السؤال النقطة الحرجة عند $x = 2$ تقع عند أطراف الفترة لذا لا يؤثر ذلك في لا
نعتبرها أي شيء.

جد $U(\sigma, f)$, $L(\sigma, f)$ حيث
 $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 2x$
علما أن $\sigma = (1, 2, 4)$ استخدم ثلاث جزيئات متساوية (b)

$$\bar{f}(x) = 6x + 2 = 0 \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \notin [1, 4]$$

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[1, 2]$	1	5	16	5	16
$[2, 4]$	2	16	56	32	112
				37	128

$$\therefore L(\sigma, f) = 37 \quad U(\sigma, f) = 128$$

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[1, 2]$	1	5	16	5	16
$[2, 3]$	1	16	33	16	33
$[3, 4]$	1	33	56	33	65
				54	105

$$\therefore L(\sigma, f) = 54 \quad U(\sigma, f) = 105$$

التكامل المحدد

إذا كانت $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فإنه يوجد عدد وحيد مثل k حيث $L(\sigma, f) \leq k \leq U(\sigma, f)$ يسمى العدد k بالتكامل المحدد للدالة f على الفترة المغلقة $[a, b]$ ونرمز له $\int_a^b f$ حيث a, b حدي التكامل أي ان التكامل المحدد يعطي ناتج عددي يمثل

$$k = \int_a^b f = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2}$$

مساحة أي ان

ليكن $f(x) = 2x - 3$ حيث $f: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ أوجد $\int_2^5 f$ وتحقق هندسياً من الناتج

مثال

الحل: \therefore الدالة متزايدة ولا توجد نقطة حرجية $f'(x) = 2 > 0$

الطريقة الأولى

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[2, 3]$	1	1	3	1	3
$[3, 4]$	1	3	5	3	5
$[4, 5]$	1	5	7	5	7
				9	15 = المجموع

خاص
بالتطبيقي
2021

$$\therefore \int_2^5 f = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{9 + 15}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ وحدة مربعة}$$

الطريقة الثانية (التحقق هندسياً)

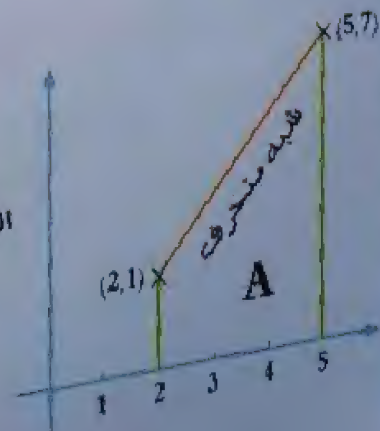
$$x=2 \Rightarrow y=2(2)-3=1 \quad (2,1)$$

$$x=5 \Rightarrow y=2(5)-3=7 \quad (5,7)$$

الارتفاع (مجموع القاعدتين المتوازيتين) $= \frac{1}{2}$ مساحة شبه المنحرف

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (1+7) \cdot 3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \\ &= 12 \text{ unit}^2 \end{aligned}$$

خاص
بالتطبيقي
2021

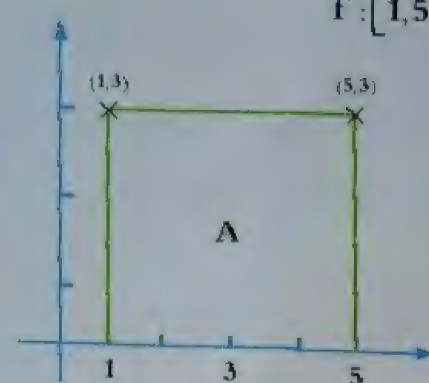


التكامل

السادس
التطبيقي

2

لنكن $f: [1,5] \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 3$



الطريقة الاولى

أوجد $\int_1^5 f$

المساحة $A = \text{الطول} \times \text{العرض}$
 المساحة $A = (4) (3) = 12 \text{ unit}^2$

الطريقة الثانية

خاص
بالتطبيقي
حذرت
2021

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[1, 3]$	2	3	3	6	6
$[3, 5]$	2	3	3	6	6
				12	12

$$\therefore \int_1^5 f = \int_1^5 3 dx = \frac{12 + 12}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ unit}^2$$

تمارين (4-2)

أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x} dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3)$

الدالة f متناقصة $\bar{f}(x) = \frac{x(0) - 3(1)}{x^2} = \frac{-3}{x^2} < 0$

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[1, 2]$	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	3
$[2, 3]$	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
				$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$

$$\therefore \int_1^3 \frac{3}{x} dx = \frac{\frac{5}{2} + \frac{9}{2}}{2} = \frac{14}{2} = \frac{7}{2} \text{ unit}^2$$

خاص
بالتطبيقي
حذرت
2021

لنكن $f(x) = 3x - 3$ حيث $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$

سؤال 2

أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^5 f$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3, 5)$ ثم تحقق هندسياً بحساب مساحة المنطقة تحت منحنى f

متزايدة $f(x) = 3 > 0$

الحل

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[1, 2]$	1	0	3	0	3
$[2, 3]$	1	3	6	3	6
$[3, 5]$	2	6	12	12	24
				15	33 = المجموع

$$\therefore \int_1^5 f = \int_1^5 (3x - 3) dx = \frac{15 + 33}{2} = 24 \text{ unit}^2$$

$$f(1) = 3(1) - 3 = 0$$

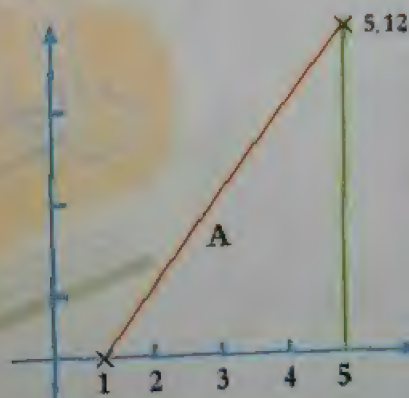
$$(1, 0)$$

$$f(5) = 3(5) - 3 = 12$$

$$(5, 12)$$

$$\text{مثلث } A = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$A = \frac{1}{2} (4)(12) = 24 \text{ unit}^2$$



الحل هندسياً

خاص بالتطبيقي

2021

أوجد التكامل $\int_2^4 f = (3x^2 - 3) dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (2, 3, 4)$

سؤال 3

$$f(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [2, 4]$$

الحل

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[2, 3]$	1	9	24	9	24
$[3, 4]$	1	24	45	24	45
				33	48 = المجموع

$$\therefore \int_2^4 (3x^2 - 3) dx = \frac{33 + 48}{2} = 40.5 \text{ unit}^2$$

السادس التطبيقي

التكامل

أوجد قيمة تقديرية للتكامل $\int_1^5 f(x) dx$ حيث $f(x) = -4$

سؤال 4

لتكن $\sigma = (-3, 0, 2)$

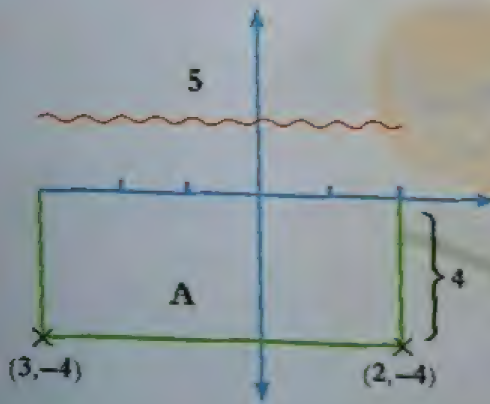
الحل

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[-3, 0]$	3	-4	-4	-12	-12
$[0, 2]$	2	-4	-4	-8	-8
				20	20

مجموع = 20

$$\therefore \int_{-3}^2 f(x) dx = \int_{-3}^2 f(x) dx = \int_{-3}^2 -4 dx = \frac{20 + 20}{2} = 20 \text{ unit}^2$$

(الطريقة هندسية)



$$A = \int_{-3}^2 f(x) dx$$

$$= \text{العرض} \times \text{الطول}$$

$$= 4 \times 5$$

$$= 20 \text{ unit}^2$$

خاص
بالتطبيقي

2021

قبل أن نسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايصالها بالهواتف او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء المزرمة مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال شرعي وقانوني (غير مبرر الذمة) كل من يقوم بهذه الافعال . علما ان ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحانسة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتخليم الصناعي وتأكد واحذر ان هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون العراقي المرقم (٢٦) لسنة (١٩٥٢) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف .
لذا اقتضى التنويه والتحذير

النظرية الأساسية للتكامل / الدالة المقابلة

التكامل

هو عملية عكس الاشتقاق أو عملية ارجاع المشتقة الى الدالة الاصلية او يعرف
كما يلي:

إذا كانت f مستمرة على الفترة $[a, b]$ فإنه يوجد دالة مثل F مستمرة على الفترة $[a, b]$ بحيث

$$\bar{F}(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = f(b) - f(a) \quad \text{ويكون}$$

وتسمى F دالة مقابلة للدالة f على الفترة $[a, b]$

ملاحظة

تكون F دالة مقابلة للدالة f إذا كانت $\bar{F}(x) = f(x)$

مثال

إذا كانت $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x$

وكانت $F: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x^2$

إثبت ان F هي دالة مقابلة للدالة f وجد $\int_1^2 f$

الحل

$$\bar{F}(x) = 2x = f(x)$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة f

$$\int_1^2 f = [F(x)]_1^2 = [x^2]_1^2 = 4 - 1 = 3$$

ملاحظة

- بفصل دراسة هذه البوابة نجد دراسة قواعد التكامل من (153) إلى من (172) ثم البدء بهذا الموضوع.
- عندما يطلب في السؤال أن الدالة $f(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ يجب أن نتبع ما يلي:
 - أولاً، نثبت استمرارية الدالة $f(x)$ على الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلية الاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b) .
 - ثانياً، نشتق الدالة $f(x)$ أي نجد فإذا كان $F(x) = f'(x)$ تكون F مقابلة للدالة f .

باختصار، عند اشتقاق الدالة $f(x)$ يكون ناتج الاشتقاق هو الدالة $f'(x)$ وعند تكامل الدالة $f(x)$ يكون ناتج التكامل هو الدالة $F(x)$.

مثال 1

أثبت فيما إذا كانت $F(x) = x^3 + 2$ ، $F: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = 3x^2$.

أولاً، الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة المغلقة $[1, 3]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(1, 3)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثانياً،

$$\begin{cases} F(x) = x^3 + 2 \\ F'(x) = 3x^2 \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

انظر إلى اشتقاق $F(x)$ كان ناتج اشتقاق الدالة $f(x)$.

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة على $[1, 3]$.

مثال 2

أثبت أن الدالة $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ ، $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مقابلة للدالة

$$f(x) = \cos 2x \quad \text{ثم جد} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$$

أولاً، الدالة $f(x)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

ثانياً،

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cos 2x \cdot (2)$$

$$F'(x) = \cos 2x$$

$$F'(x) = f(x)$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة f

توضيح

دالة $\sin x$ ، $\cos x$ وهي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق كما مر علينا في الصف الخامس.

هي دالة مقابلة للدالة

(تكمال f هو يعاوي الدالة)

ملاحظة

إذا أعطى دالة ليست كثيرة الحدود والفترة $[a, b]$ وليست \mathbb{R} بحيث ان تثبت الاستمرارية للدالة بطريقة أخذ صورة لعنصر من العناصر الفترة مثل a وغاية $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ كما في المثال التالي.

مثال 2

المتة ان $F(x)$ الدالة مقابلة للدالة $f(x)$ ثم جد

$$F(x) = \sin x + x, \quad F: [0, \frac{\pi}{6}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 1 + \cos x, \quad f: [0, \frac{\pi}{6}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx \quad \text{ثم احسب}$$

أولاً، نثبت استمرارية الدالة عند $\forall a \in [0, \frac{\pi}{6}]$

الدالة معنيرة على الفترة المغلقة $[0, \frac{\pi}{6}]$

وكذلك قابلة للإشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, \frac{\pi}{6})$

$$F(x) = \sin x + x \Rightarrow \bar{F}(x) = \cos x + 1$$

$$\bar{F}(x) = f(x)$$

F مقابلة للدالة f

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos x) dx$$

$$= [x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= (\frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6}) - (0 + \sin 0)$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi + 3}{6}$$

الأحياني
التطبيقي

2

التكامل

إذا كانت F دالة مستمرة على الفترة f بحيث $F(x) = 3x^2$ دالة مقابلة للدالة f

مثال

فجد $\int_1^5 f(x) dx$

$$\int_1^5 f(x) dx = [F(x)]_1^5$$

$$= [3x^2]_1^5$$

$$= 3(5)^2 - 3(1)^2$$

$$= 75 - 3 = 72$$

في هذا السؤال لم يطلب إثبات بل ذكر

توضيح

بأن F مقابلة للدالة f لذلك فإن تكامل f هو دالة F

كما في ملاحظة ص (1).

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ وأن الدالة مقابلة للدالة f هي

مثال

فوجد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ ، $F(x) = \sin x$ ، $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0$$

$$= 1 - 0 = 1$$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

$$F(x) = f(x)$$

خلاصة:

تكامل f يعطي F .

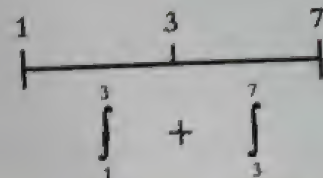
اشتقاق F يعطي f .

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار القرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايضاً بالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء الملزمة مستنسخة وبمعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره تكون فيها اشكال شرعي وقانوني (وغير مبرر الذمة) كل من يقوم بهذه الافعال . علماً ان ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحائزة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتؤكد واحذر ان هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون العراقي الرقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) والتعديل برقم (٨٠) في ٢٠٠٤ / ٤ / ٣٦ وللحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف .
لذا لنتقن التنويه والتحذير

أسئلة من شمس

مثال 6 إذا كانت $\int_3^7 f(x) dx = 8$ ، $\int_1^3 f(x) dx = 5$ ، فأوجد $\int_1^7 f(x) dx$

$$\begin{aligned} \int_1^7 f(x) dx &= \int_1^3 f(x) dx + \int_3^7 f(x) dx \\ &= 5 + 8 = 13 \end{aligned}$$



مثال 7 $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2, 6]$ فإذا كانت $\int_1^6 f(x) dx = 6$ وكانت $\int_{-2}^1 f(x) dx$ جد $\int_{-2}^6 [f(x) + 3] dx = 32$

$$\int_{-2}^6 [f(x) + 3] dx = 32$$

$$\int_{-2}^6 f(x) dx + \int_{-2}^6 3 dx = 32$$

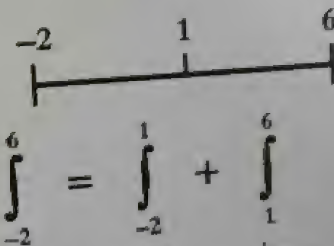
$$\int_{-2}^6 f(x) dx + [3x]_{-2}^6 + 32$$

$$\int_{-2}^6 f(x) dx + [3(6) - 3(-2)] = 32$$

$$\int_{-2}^6 f(x) dx + 24 = 32 \Rightarrow \int_{-2}^6 f(x) dx = 32 - 24 = 8$$

$$\int_{-2}^6 f(x) dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^6 f(x) dx$$

$$8 = \int_{-2}^1 f(x) dx + 6 \Rightarrow \int_{-2}^1 f(x) dx = 2$$



معطى = مطلوب نبحث عنه

أولاً: تكامل الثابت:

$$\int a \, dx = ax + c \Rightarrow \text{فقط نُضِيفُ متغير للثابت أما } x \text{ أو } y \text{ أو } t \text{ بحسب التكامل.}$$

① $\int 3 \, dx = 3x + c$ نضيف x لأن التكامل dx

② $\int -5 \, dx = -5x + c$ كذلك

③ $\int \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{2}x + c$ كذلك

④ $\int \frac{1}{3} \, dy = \frac{1}{3}y + c$ نضيف y لأن التكامل dy

⑤ $\int \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2}t + c$ نضيف t لأن التكامل dt

ثانياً: تكامل x^n (مرفوعة الى اس)

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$\begin{array}{l} \text{موجب} \\ \text{سالِب} \\ \text{كسر} \end{array} \rightarrow n \text{ (الأس)}$

- * عندما يكون الأس n عدد صحيح موجب نضيف للأس واحد ونقسم على الأس الجديد.
- * عندما يكون الأس n عدد صحيح سالِب كذلك نضيف للأس واحد ونقسم على الأس الجديد ولكن هنا الأس سوف ينقص لأنه سالِب ونضيف $(+1)$ تصبح طرح.

أمثلة توضيحية (أساسية) حول القاعدة السوية

① $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$
 نضيف للأس واحد $\rightarrow x^3$
 نقسم على الأس الجديد $\rightarrow 3$

② $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

③ $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$

④ $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$

⑤ $\int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c$
 $= x^3 + c$

⑥ $\int 4x^3 dx = \frac{4x^4}{4} + c$
 $= x^4 + c$

⑦ $\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c$
 $= \frac{-1}{x} + c$

⑧ $\int x^{-8} dx = \frac{x^{-7}}{-7} + c$
 $= \frac{-1}{7x^7} + c$

⑨ $\int -5x^{-6} dx = \frac{-5x^{-5}}{-5} + c$
 $= \frac{1}{x^5} + c$

⑩ $\int -2x^{-7} dx = \frac{-2x^{-6}}{-6} + c$
 $= \frac{1}{3x^6} + c$

* إذا كانت أس x كسر نضيف (1) ثم نضرب في مقلوب الأس الجديد .

المقام + البسط

المقام

* ملاحظة ذات صلة: للتخلص من الجذر نتبع الطريقة التالية:

الداخل
الشارح
(ما بداخل الجذر)

مثلاً $\sqrt{x} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}}$

مثلاً $\sqrt{2x+1} \Rightarrow (2x+1)^{\frac{1}{2}}$

مثلاً $\sqrt[3]{x^5} \Rightarrow x^{\frac{5}{3}}$

مثلاً $\sqrt[3]{(x^2+1)^3} \Rightarrow (x^2+1)^{\frac{3}{3}}$

أمثلة توضيحية (أساسية)

① $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

② $\int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + c$

③ $\int x^{\frac{4}{5}} dx = \frac{5}{9} x^{\frac{9}{5}} + c$

④ $\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$

نقوم بإرجاع الدالة جذر بعد إكمال التكامل مثلاً:

ملاحظة

⑤ $\int \sqrt{x^3} dx$
 $\int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c$
 $= \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + c$

⑥ $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx \Rightarrow \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$
 $\int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{-2}{1} x^{-\frac{1}{2}} + c$
 $= \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$

أمثلة أساسية تخص القاعدتين الأولى والثانية

$$④ \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} \right) dx$$

$$\int \left(x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} \right) dx$$

$$= \frac{2}{1} x^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$$

$$= 2\sqrt{x} - \frac{9}{5} \sqrt[3]{x^5} + c$$

$$⑤ \int \sqrt{x} (x+1)^2 dx$$

$$\int x^{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x + 1) dx$$

$$\int \left[x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right] dx$$

$$= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 2 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{7} \sqrt{x^7} + \frac{4}{5} \sqrt{x^5} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$① \int (2x+1) dx$$

$$= \frac{2x^2}{2} + x + c$$

$$= x^2 + x + c$$

$$② \int (x^{-2} + x - 3x^2) dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} + c$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - x^3 + c$$

$$③ \int (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}) dx$$

$$\int (x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}) dx$$

$$= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

ثالثاً: تكامل قوس مرفوع الى اس مضروب في مشتقة داخل القوس

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

عند تكامل قوس مرفوع الى اس يجب ان تكون مشتقة داخل القوس متوفرة وبعد توفير مشتقة داخل القوس نُهمل ونضيف لأس القوس (1) ونقسم على الأس الجديد .

$$\textcircled{1} \int (x^2 + 1)^3 \cdot 2x \, dx = \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + c$$

هذه

انظر الى مثال (1) تجد ان القوس $(x^2 + 1)$ مشتقة داخله $(2x)$ وهي متوفرة لذلك مباشرة نُهمل ونضيف لأس القوس (1) ونقسم على الأس الجديد .

$$\textcircled{2} \int 3(1 + 3x)^5 \, dx = \frac{(1 + 3x)^6}{6} + c$$

هذه

انظر الى المثال (2) تجد ان القوس مشتقة داخله هي (3) ومتوفرة لذلك مباشرة نُهمل ونضيف لأس القوس (1) ونقسم على الأس الجديد .

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمتنا (ملازم دار الغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايصالها بالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء الملزمة مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال شرعي وقانوني (وغير مبررة الذمة) كل من يقوم بهذه الأفعال ، علماً ان ملازمتنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحاضرة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتؤكد وأحذر ان هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لان ملازمتنا مسجلة بصورة قانونية وحاصلة على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون العربي برقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف .

تجديد عام جديد



ماذا لو كانت مشتقة داخل القوس غير ثابتة ؟

الحل

هناك احتمالات :

أولاً، نوفر مشتقة الداخل (داخل القوس) وذلك عن طريق ضرب وقسمة التكامل بثابت

ثم نهمل المشتقة ونضيف لأس القوس (1) ونقسم على الأس الجديد .

$$\int (\text{الثابت})^n dx = \frac{1}{\text{الثابت}} \int \text{الثابت} dx$$

مثلاً $\int (3x+1)^3 dx$

مشتقة داخل القوس (3) وهو ثابت غير موجود

لذلك نقوم بتوفير مشتقة داخل القوس .

$$\frac{1}{3} \int 3 (3x+1)^3 dx$$

تهمل

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^4}{4} + c$$

$$= \frac{1}{12} (3x+1)^4 + c$$

مثلاً $\int x (x^2+3)^2 dx \Rightarrow$

لاحظ المشتقة داخل القوس $2x =$ ولدينا x فقط

لذلك نحتاج (2) .

$$\frac{1}{2} \int 2x (x^2+3)^2 dx$$

تهمل مشتقة داخل قوس

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+3)^3}{3} + c$$

$$= \frac{1}{6} (x^2+3)^3 + c$$

$\int (x^2+3)^2 dx$

$\int (x^4+6x^2+9) dx$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{6x^3}{3} + 9x + c$$

$$= \frac{x^5}{5} + 2x^3 + 9x + c$$

ثانياً، لا يمكن توفير المشتقة لذلك نفتح القوس

هنا المشتقة $2x$ لا يمكن توفيرها لأننا نوفر

ثابت فقط ولا يمكن توفير متغير مثل x لذلك نفتح التربيع .

التكامل المحدد

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ فإنه توجد دالة F مستمرة على الفترة $[a, b]$ بحيث:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b)$$

ويكون

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

الأكبر ← b
الأصغر ← a

قواعد التكامل المحدد هي نفسها القواعد السابقة لا توجد قواعد جديدة والاختلاف فقط في الخطوة الأخيرة حيث لا نضيف ثابت التكامل في التكامل المحدد وإنما نعوض حدود التكامل. نعوض الحد الأعلى ثم نضع الإشارة $-$ ثم نعوض الحد الأدنى.

مثلاً

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \int_1^2 2x \, dx &= \left[\frac{2x^2}{2} \right]_1^2 \\ &= [x^2]_1^2 \\ &= (2)^2 - (1)^2 = 3 \end{aligned}$$

الأعلى ← $(2)^2$ الأدنى ← $(1)^2$

مثلاً

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \int_0^1 (3x^2 - 2) \, dx &= [x^3 - 2x]_0^1 \\ &= [(1)^3 - 2(1)] - [(0)^3 - 2(0)] \\ &= 1 - 2 - 0 = -1 \end{aligned}$$

الأعلى ← $(1)^3 - 2(1)$ الأدنى ← $(0)^3 - 2(0)$

إذا جاءت حدود التكامل معكوسة (الأعلى أصغر من الأدنى) نقلب الحدود ونضع الإشارة $-$ قبل التكامل.

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \int_2^1 (x+2) \, dx &\Rightarrow -\int_1^2 (x+2) \, dx \\ &= -\left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 \\ &= -\left[\left(\frac{2^2}{2} + 2(2) \right) - \left(\frac{1^2}{2} + 2(1) \right) \right] \\ &= -\left(6 - \frac{1}{2} - 2 \right) = -3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

حالات تكامل الدول الجبرية

أولاً: لا يوجد في التكامل قاعدة لحاصل ضرب دالتين لذلك عند تكامل قوسين بينهما حاصل ضرب () () نوزع الأقواس ثم نجري التكامل.

التمويض

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{(4)^4}{4} - \frac{3(4)^2}{2} - 2(4) \right] - \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{3(1)^2}{2} - 2(1) \right] \\
 &= (64 - 24 - 8) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 \right) \\
 &= 32 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{34}{1} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \\
 &= \frac{136 - 1 + 6}{4} = \frac{141}{4}
 \end{aligned}$$

مثال 1 جد: $\int (3x-1)(x+3) dx$

توزيع القوسين $\int (3x^2 + \frac{9x-x-3}{\text{طرح}}) dx$

$$\int (3x^2 + 8x - 3) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x}} + \frac{8x^2}{2} - 3x + c \rightarrow \text{عملية التكامل} \\
 &= x^3 + 4x^2 - 3x + c
 \end{aligned}$$

مثال 3 جد قيمة:

$$\int_0^1 \sqrt{x} (\sqrt{x} + 2)^2 dx$$

* هنا يجب ان نفتح التربيع لأن مشتقة

داخل القوس $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ولا يمكن توغيرها.

* استفد من ملاحظة (ثانياً) ص 1.

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (x + 4\sqrt{x} + 4) dx$$

$$\int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}}) dx$$

مثال 2 جد: $\int_1^4 (x-2)(x+1)^2 dx$

مربع حدانية $\int_1^4 (x-2)(x^2 + 2x + 1) dx$

توزيع القوسين $\int_1^4 (x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2) dx$

$$\int_1^4 (x^3 - 3x^2 - 2x) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{2} - 2x \right]_1^4$$

عملية التكامل

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{2} + 4 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 \\
 &= \left[\frac{2}{5} \sqrt{x^5} + 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^1 \\
 &= \left[\frac{2}{5} \sqrt{(1)^5} + 2(1)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{3} \sqrt{(1)^3} \right] - [0] \\
 &= \frac{2}{5} + \frac{2}{1} + \frac{8}{3} \\
 &= \frac{6+30+40}{15} = \frac{76}{15}
 \end{aligned}$$

ثانياً، إذا كانت لدينا بسط ومقام قابل للتحويل نُحلل ثم نختصر وبعد ذلك نجري عملية التكامل.

$$\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1} dx$$

أوجد:

مثال 5

(2018 / تمهيد / أحياني)

$$= \int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} dx$$

$$= \int_2^3 (x^2+x+1) dx$$

$$= - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_2^3$$

$$= - \left[\left(\frac{(3)^3}{3} + \frac{(3)^2}{2} + 3 \right) - \left(\frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} + 2 \right) \right]$$

$$= - \left[\left(\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 2 \right) \right]$$

$$= - \left[\left(9 + \frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{8}{3} + 2 + 2 \right) \right]$$

$$= - \left(\frac{12}{1} + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} - \frac{4}{1} \right)$$

$$= - \left(\frac{72+27-16-24}{6} \right) = - \frac{59}{6}$$

$$\int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1} dx$$

أوجد:

مثال 4

$$= \int_2^3 \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-1)} dx$$

$$= \int_2^3 \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)} dx$$

$$= \int_2^3 (x^2+1)(x+1) dx$$

توزيع الأقواس

$$= \int_2^3 (x^3+x^2+x+1) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_2^3$$

$$= \left[\frac{(3)^4}{4} + \frac{(3)^3}{3} + \frac{(3)^2}{2} + 3 \right] - \left[\frac{(2)^4}{4} + \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} + 2 \right]$$

$$= \left(\frac{81}{4} + \frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{16}{4} + \frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 2 \right)$$

$$= \left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2} + 9 + 3 \right) - \left(4 + \frac{8}{3} + 2 + 2 \right)$$

$$= \frac{81}{4} + \frac{9}{2} + \frac{12}{1} - \frac{8}{3} - \frac{8}{1} = \frac{313}{12}$$

$$\int \frac{y^4 - y}{y^2 + y + 1} dy$$

$$\int \frac{y(y^3 - 1)}{y^2 + y + 1} dy$$

$$\int \frac{y(y-1)(y^2+y+1)}{(y^2+y+1)} dy$$

$$\int y(y-1) dy$$

$$\int (y^2 - y) dy \quad \text{نجزّي التكامل}$$

$$= \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + c \quad \text{الناتج}$$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} dx$$

مثال 6 جد:

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} dx \quad \text{تحليل واختصار}$$

$$\int (\sqrt{x} + 1) dx \xrightarrow{\text{تعديل}} \int (x^{\frac{1}{2}} + 1) dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x + c \quad \text{نجزّي التكامل}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + x + c \quad \text{الناتج}$$

تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكّر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

$$\int \frac{x^2 - x}{\sqrt{x-1}} dx$$

مثال 7 جد:

$$\int \frac{x(x-1)}{\sqrt{x-1}} dx \Rightarrow \frac{x(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-1})}$$

$$\int x(\sqrt{x} + 1) dx \Rightarrow \int x(x^{\frac{1}{2}} + 1) dx$$

$$\int (x^{\frac{3}{2}} + x) dx$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + \frac{1}{2} x^2 + c$$



احسب التكامل:

مثال 12

$$\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2} dx$$

$$\int \frac{4x^4-12x^2+9-9}{x^2} dx$$

$$\int \frac{x^2(4x^2-12)}{x^2} dx$$

$$\int (4x^2-12) dx$$

$$= \frac{4x^3}{3} - 12x + c$$



فكر

حاول حل المثال بطريقة أخرى.

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$$

احسب:

مثال 13

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} dx$$

مشتقة الداخل

$$\int \frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -2 \int \frac{1(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{-2\sqrt{x}} dx$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) (1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= -\frac{4}{3} \sqrt{(1-\sqrt{x})^3} + c$$

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{-\frac{2}{4}} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

توضيح

جد التكامل التالي:

مثال 10

$$\int \frac{x-5\sqrt{x}+6}{x-3\sqrt{x}} dx$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{x} & \sqrt{x} & 3\sqrt{x} \end{matrix} \quad \sqrt{x} \text{ عامل مشترك}$$

$$\int \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} dx$$

$$2 \int \frac{1(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}} dx$$

القوس $(\sqrt{x}-2)$ قوس مرفوع إلى أس مشتقة داخل

$$\text{القوس} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ لدينا } \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ نحتاج (2)}$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\cancel{2}} + c$$

$$= (\sqrt{x}-2)^2 + c$$

جد التكامل التالي:

مثال 11

$$\int \frac{x^3-x^2+3x-3}{x^2+3} dx$$

$$\int \frac{(x^3-x^2)+(3x-3)}{(x^2+3)} dx$$

عامل مشترك

$$\int \frac{x^2(x-1)+3(x-1)}{(x^2+3)} dx$$

$$\int \frac{(x-1)[(x^2+3)]}{(x^2+3)} dx$$

$$\int (x-1) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + c$$



ثالثاً، إذا كانت لدينا قوس مرفوع الى اس نوفر مشتقة داخل القوس ثم نكامل وان القوس المرفوع الى اس في الحقام نرفعه للبسط ونغير الاشارة الأس.

مثال 16 جد: $\int x (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx$

مباشرة نوفر مشتقة داخل القوس (2x)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int 2x (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{7}{2}} + c \\ &= \frac{1}{2} \sqrt[4]{(x^2 + 1)^7} + c \end{aligned}$$

1 د / 2007

مثال 17 جد: $\int x (x^2 + 3)^3 dx$

مباشرة نوفر مشتقة داخل القوس (2x)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int 2x (x^2 + 3)^3 dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 3)^4}{4} + c \\ &= \frac{1}{8} (x^2 + 3)^4 + c \end{aligned}$$

1 د / 2003

مثال 18 جد: $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$

1 د / 2009

$$\begin{aligned} \int x (x^2 + 1)^{-2} dx &\Rightarrow \frac{1}{2} \int 2x (x^2 + 1)^{-2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{-1}}{-1} \right]_0^1 = \left[\frac{-1}{2(x^2 + 1)} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{-1}{2(1^2 + 1)} \right) - \left(\frac{-1}{2(0^2 + 1)} \right) \\ &= \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{-1 + 2}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

مثال 14 جد: $\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2} dx$

نرفع القوس ونغير الاشارة $\int_1^2 (5-2x)^{-2} dx$

نوفر مشتقة داخل القوس (-2)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{-2} \int -2 (5-2x)^{-2} dx \\ &= \left[\frac{-1}{-2} \cdot \frac{(5-2x)^{-1}}{-1} \right]_1^2 \\ &= \left[\frac{1}{2(5-2x)} \right]_1^2 \end{aligned}$$

1 د / 2006

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2(5-2(2))} - \frac{1}{2(5-2(1))} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

مثال 15 جد: $\int \frac{dx}{(3x-4)^2}$

نرفع القوس ونغير الاشارة $\int (3x-4)^{-2} dx$

نوفر مشتقة داخل القوس (3)

$$\frac{1}{3} \int 3 (3x-4)^{-2} dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-4)^{-1}}{-1} \right]_1^2 \\ &= \left[\frac{-1}{3(3x-4)} \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{-1}{3(3(2)-4)} \right) - \left(\frac{-1}{3(3(1)-4)} \right) \\ &= \frac{-1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{-1-2}{6} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

2 د / 2008

$$\int \frac{dx}{9-12x+4x^2}$$

جد:

مثال 20

نفس الحل السابق فقط تغيير حدود التكامل.

$$= \left(\frac{1}{3} \right)$$

2 د / 2003

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$$

جد:

مثال 19

الرقم يحلل $(3-2x)(3-2x) = (3-2x)^2$ مربع كامل

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-2x)^2} \Rightarrow \int_{-1}^1 (3-2x)^{-2} dx$$

نقوم مشتقة داخل القوس (-2)

$$\frac{1}{-2} \int_{-1}^1 -2 (3-2x)^{-2} dx$$

2 د / 2003

$$= \left[\frac{1}{-2} \cdot \frac{(3-2x)^{-1}}{-1} \right]_{-1}^1$$

$$= \left[\frac{1}{2(3-2x)} \right]_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{1}{2(3-2(1))} \right) - \left(\frac{1}{2(3-2(-1))} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{5-1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

رابعاً: تكامل الدالة الجبرية التي تحتوي على جذر: لها ثلاث حالات:

الأولى: أن يحتوي الجذر على عامل مشترك ويكون العامل المشترك عادلاً يعطوي دليل الجذر.

$$\text{مثلاً: } \sqrt[3]{x^5 - 3x^3} \Rightarrow \sqrt[3]{x^3(x^2 - 3)}$$

* يوجد عامل مشترك وهو x^3 أس x هو 3 دليل الجذر

التكامل

$$\int_{-1}^1 \sqrt[3]{3x^3 - 2x^5} dx$$

مثال 22 جد قيمة:

$$\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x^3(3-2x^2)} dx$$

2004 / د 2

$$\int_{-1}^1 x(3-2x^2)^{\frac{1}{3}} dx$$

2015 / خارج القطر

مشتقة داخل قوس $-4x =$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 -4x(3-2x^2)^{\frac{1}{3}} dx$$

$$= \left[\frac{-1}{4} \cdot \frac{3}{4} (3-2x^2)^{\frac{4}{3}} \right]_{-1}^1$$

$$= \left[\frac{-3}{16} \sqrt[3]{(3-2x^2)^4} \right]_{-1}^1$$

$$= \left[\frac{-3}{16} \sqrt[3]{(3-2(1)^2)^4} \right] - \left[\frac{-3}{16} \sqrt[3]{(3-2(-1)^2)^4} \right]$$

$$= \frac{-3}{16} \sqrt[3]{(3-2)^4} + \frac{3}{16} \sqrt[3]{(3-2)^4}$$

$$= \frac{-3}{16} (1) + \frac{3}{16} (1) = 0$$

$$\int_{\frac{3}{8}}^{\frac{8}{3}} \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}} dx$$

مثال 21 جد قيمة:

$$\int_{\frac{3}{8}}^{\frac{8}{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}} dx$$

2009 / د 2

$$\int_{\frac{3}{8}}^{\frac{8}{3}} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} (x+1)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$\int_{\frac{3}{8}}^{\frac{8}{3}} (x+1)^{-\frac{1}{2}} dx$$

قوس مرفوع الى اس والبشتقة = 1

$$= \left[\frac{2}{1} (x+1)^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{3}{8}}^{\frac{8}{3}}$$

$$= \left[2\sqrt{x+1} \right]_{\frac{3}{8}}^{\frac{8}{3}}$$

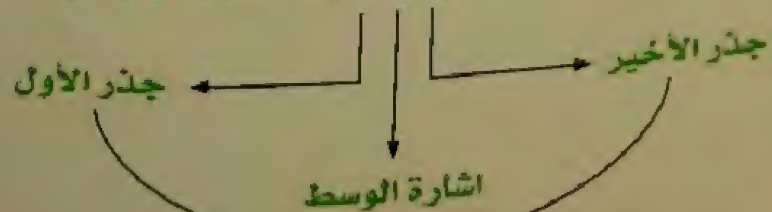
$$= (2\sqrt{8+1}) - (2\sqrt{3+1})$$

$$= 2(\sqrt{9}) - 2(\sqrt{4})$$

$$= 6 - 4 = 2$$

الثانية ♦ ان يكون داخل الجذر مربع كامل:

1 $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$



2 $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^4 - 4x^2 + 4}} dx$$

احسب:

مثال 24

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2 - 2)^2}} dx \Rightarrow \int \frac{x}{(x^2 - 2)^{\frac{2}{3}}} dx \Rightarrow \int x (x^2 - 2)^{-\frac{2}{3}} dx$$

$$\frac{1}{2} \int 2x (x^2 - 2)^{-\frac{2}{3}} dx$$

مشتقة داخل القوس $2x =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} (x^2 - 2)^{\frac{1}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x^2 - 2)^1} + c$$

النتيجة: ان يكون داخل الجذر حدودية لا تحتوي عامل مشترك ولا تحلل مربع كامل لذلك نتخلص منها مباشرة.

$$\int_4^8 x \sqrt{x^2 - 15} dx$$

جد:

مثال 25

$$\int_4^8 x (x^2 - 15)^{\frac{1}{2}} dx$$

مشتقة داخل

القوس $2x =$

$$\frac{1}{2} \int_4^8 2x (x^2 - 15)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2 - 15)^{\frac{3}{2}} \right]_4^8$$

$$= \left[\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - 15)^3} \right]_4^8$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{(8^2 - 15)^3} - \frac{1}{3} \sqrt{(4^2 - 15)^3}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{49^3} - \frac{1}{3} \sqrt{1^3}$$

15/1999

$$= \frac{343}{3} - \frac{1}{3} = \frac{343}{3} = 114$$

$$\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$$

جد:

مثال 26

$$\int_0^7 (x+1)^{-\frac{1}{3}} dx$$

2008 / نموني

$$= \left[\frac{3}{2} (x+1)^{\frac{2}{3}} \right]_0^7$$

$$= \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} \right]_0^7$$

$$= \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{(7+1)^2} \right] - \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{(0+1)^2} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{64} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{1}$$

$$= \frac{3}{2} (4) - \frac{3}{2} (1)$$

$$= \frac{6}{1} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{12-3}{2} = \frac{9}{2}$$

خامساً، عندما نجري خطوات التكامل ونواجه قوسين أحدهما مرفوع إلى أس وكلاهما ليس مشتقة الآخر أي أن المشتقة لا تتوفر نقوم بمساواة ما بداخل الأقواس ونضرب الأقواس (عند الضرب تجمع الأسس) ويصبح قوس واحد مرفوع إلى أس.

مثال 27 جد التكامل: $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x-2}} dx$

$\int \frac{3(x-2)}{(x-2)^{\frac{1}{2}}} dx$
 نساوي الداخل بسحب عامل مشترك ليصبح قوس مرفوع إلى أس.

$3 \int (x-2)(x-2)^{-\frac{1}{2}} dx$

$3 \int (x-2)^{\frac{1}{2}} dx$

$= 3 \cdot \frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{9}{5} \sqrt{(x-2)^5} + c$

2 د / 2015

مثال 28 جد التكامل: $\int \frac{x-3}{(2x-6)^3} dx$

$\int (x-3)(2x-6)^{-3} dx$

نساوي داخل الأقواس ثم نضرب الأقواس لتصبح قوس واحد مرفوع إلى أس.

$\int (x-3) [2(x-3)]^{-3} dx$

$2^{-3} \int (x-3)(x-3)^{-3} dx$

$\frac{1}{2^3} \int (x-3)^{-2} dx \Rightarrow \frac{1}{8} \int (x-3)^{-2} dx$

$= \frac{1}{8} \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + c$

2010 / د (1) خارج القطر

$= \frac{-1}{8(x-3)} + c$

عندما نسحب عامل مشترك من قوس مرفوع إلى أس فأنا نضع أس القوس مع العامل المشترك والقوس.

$(2x-6)^{-3} \Rightarrow 2^{-3} (x-3)^{-3}$

مثال توضيحي $\int (2x-1)(2x-1)^{\frac{1}{2}} dx$

$\int (2x-1)^{\frac{1}{2}} dx$

لاحظ أن المشتقة لا تتوفر يصبح قوس واحد (عند الضرب تجمع الأسس).

مثال توضيحي $\int (6x+3)(2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$

عامل مشترك (3)

$\int 3(2x+1)(2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$

(عند الضرب تجمع الأسس ويصبح قوس واحد)

$\int 3(2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$

ثم تكامل

مثال 26 جد: $\int \sqrt{2x+3} (4x+6) dx$

$\int (2x+3)^{\frac{1}{2}} 2(2x+3) dx$

$\int 2(2x+3)^{\frac{1}{2}} dx$ نصل

مشتقة داخل قوس = 2

$= \frac{2}{5} (2x+3)^{\frac{5}{2}} + c$

2006 / د 1

$= \frac{2}{5} \sqrt{(2x+3)^5} + c$

2010 / تمهيد

جد: $\int (x^3 + x) \sqrt{x^2 + 1} dx$ مثال 30

$\int x (x^2 + 1) (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx$

$\int x (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx$

مشتقة داخل القوس $2x =$

$\frac{1}{2} \int 2x (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\frac{3}{2}} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{1}{5} \sqrt{(x^2 + 1)^5} + c$

جد: $\int \frac{2-x}{\sqrt{4x-8}} dx$ مثال 31

$\int \frac{2-x}{\sqrt{4(x-2)}} dx$

$\int \frac{2-x}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}} dx$

$\int \frac{-(x-2)}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}} dx$

توضيح

$(x-2)^{\frac{1}{2}} (x-2)^{\frac{1}{2}} = (x-2)$

$-\frac{1}{2} \int (x-2)^{\frac{1}{2}} dx$

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\frac{3}{2}} (x-2)^{\frac{3}{2}} + c$

$= -\frac{1}{3} \sqrt{(x-2)^3} + c$

أفكار تكامل أخرى

المفكرة الأولى: إضافة وطرح عدد للحصول على قوس شبيه.

مثال: $\int (x-2)(x+1)^3 dx$

ثم تكامل $[(x+1)-3](x+1)^3 = (x+1)^4 - 3(x+1)^3$

قوس شبيه

لا يمكن اعتبار $(x+1)^4$ قوس لأن

$(x-2)$ لا يساوي مشتقة داخل القوس.

مثال: $\int x(x-1)^5 dx$

ثم تكامل $[(x-1)+1](x-1)^5 = (x-1)^6 + (x-1)^5$

مثال 28 جد: $\int (x+2) \sqrt[3]{x-1} dx$

$\int [(x-1)+3] (x-1)^{\frac{1}{3}} dx$

$\int (x-1)^{\frac{1}{3}} dx + \int 3 (x-1)^{\frac{1}{3}} dx$

$= \frac{3}{7} (x-1)^{\frac{4}{3}} + 3 \cdot \frac{3}{4} (x-1)^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{7} \sqrt[3]{(x-1)^7} + \frac{9}{4} \sqrt[3]{(x-1)^4} + c$

مثال 29 جد: $\int y \sqrt{y-1} dy$

$\int y (y-1)^{\frac{1}{2}} dy$

$\int [(y-1)+1] (y-1)^{\frac{1}{2}} dy$

$\int (y-1)^{\frac{1}{2}} dy + \int (y-1)^{\frac{1}{2}} dy$

$= \frac{2}{5} (y-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (y-1)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{5} \sqrt{(y-1)^5} + \frac{2}{3} \sqrt{(y-1)^3} + c$

الفكرة الأخرى: الاستفادة من خواص الأسس لدمج دالتين داخل قوس واحد.

مثال نفس الأس $x^3 (2 + \frac{1}{x})^3 = [x (2 + \frac{1}{x})]^3 = (2x+1)^3$

مثال نفس الأس $x^4 (5 - \frac{2}{x})^4 = [x (5 - \frac{2}{x})]^4 = (5x-2)^4$

مثال غير متساوي نفس الأس $x^5 (\frac{2}{x} - 3x)^4 = x \cdot x^4 (\frac{2}{x} - 3x)^4 = x [x (\frac{2}{x} - 3x)]^4 = x (2 - 3x^2)^4$

مثال $x^3 (\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x})^4 = x^{-1} \cdot x^4 (\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x})^4 = \frac{1}{x} [x (\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x})]^4 = \frac{1}{x} (\frac{1}{x^2} - 2)^4$

* كل الأقواس اعلاه لا تعتبر (قوس x مشتقة) لعدم إمكانية توفير مشتقة داخل القوس.

$$\int_0^1 x^4 \left(\frac{1}{x} + 3\right)^4 dx$$

مثال 32 جد :

$$\int_0^1 \left[x \left(\frac{1}{x} + 3\right) \right]^4 dx$$

2017 / تمهيدى

$$\int_0^1 (1 + 3x)^4 dx$$

مشتقة داخل قوس = 3

$$\frac{1}{3} \int_0^1 3 (1 + 3x)^4 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3x)^5}{5} \right]_0^1 = \left[\frac{(1+3x)^5}{15} \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{(1+3 \cdot \frac{1}{3})^5}{15} \right] - \left[\frac{(1+3 \cdot 0)^5}{15} \right]$$

الأعلى الأدنى

$$= \frac{(2)^5}{15} - \frac{(1)^5}{15} = \frac{32}{15} - \frac{1}{15} = \frac{31}{15}$$

$$\int x^8 (2x + \frac{5}{x})^7 dx$$

مثال 31 اوجد :

$$\int x \left(x^2 (2x + \frac{5}{x}) \right)^7 dx$$

$$\int x \left[x (2x + \frac{5}{x}) \right]^7 dx$$

$$\int x (2x^2 + 5)^7 dx$$

مشتقة داخل قوس = 4x

$$\frac{1}{4} \int 4x (2x^2 + 5)^7 dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x^2 + 5)^8}{8} + c$$

$$= \frac{1}{32} (2x^2 + 5)^8 + c$$

فكرة أخرى

مثال 33

$$\int x \sqrt[5]{\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}} dx$$

$$\int x \sqrt[5]{\frac{x-2}{x^5}} dx \Rightarrow \int x \cdot \sqrt[5]{\frac{(x-2)^1}{x^5}} dx$$

$$\int x \cdot \frac{(x-2)^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{5}{5}}} dx \Rightarrow \int \cancel{x} \cdot \frac{(x-2)^{\frac{1}{5}}}{\cancel{x}} dx$$

$$\int (x-2)^{\frac{1}{5}} dx = \frac{5}{6} (x-2)^{\frac{6}{5}} + c = \frac{5}{6} \sqrt[5]{(x-2)^6} + c$$

* السؤال التالي فيه فكرة مختلفة سنتطرق اليها في المسألة الآتية:

أولاً، عندما يكون فارق أس البسط عن المقام متساوي الأسس بالتجزئة.

ثانياً، نجعل البسط والمقام بقوس واحد ثم نؤخر البسطة $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)^n$.

مثال 34 جد: $\int \frac{2(x-1)^4}{(x+1)^6} dx \rightarrow$ نساوي الأسس حيث نجزء أس المقام

$$\int \frac{2(x-1)^4}{(x+1)^6} dx \Rightarrow \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \cdot \frac{2}{(x+1)^2} dx$$

* أنظر إلى القوس $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$ مشتقة داخل القوس هي:

$$\frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1 - x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

حاصل قسمة التنبين

مشتقة داخل قوس متوفرة

$$\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \cdot \frac{2}{(x+1)^2} dx$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + c$$

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايصالها بالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء الملزمة مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال شرعي وقانوني (وغير مبرر الذمة) كل من يقوم بهذه الأفعال . علما ان ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحائزة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتأكد واحذر ان هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون العراقي المرقم (٣١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف . لذا اقتضى التنويه والتحذير

تكمال الدول المثلثية

قبل التطرق إلى الموضوع عليك بمراجعة قوانين الدول المثلثية التي سبق ذكرها في بداية البلمرة .

الجزء الأول تكاملات مباشرة، وتتم هذه التكاملات عن طريق الجدول أدناه:

$$1 \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$2 \quad \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$3 \quad \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$4 \quad \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

$$5 \quad \int \sec x \cdot \tan x = \sec x + c$$

$$6 \quad \int \csc x \cot x = -\csc x + c$$

وهذا الجدول لا يتطلب سوى توفير مشتقة الزاوية حيث نقوم بتوفير مشتقة الزاوية ثم تكامل مباشرة من الجدول .

مئة وتمارين الكتاب الخاصة بالجزء الأول

احسب:

مثال

$$1 \quad \int \sin (2x + 4) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int 2 \sin (2x + 4) \, dx$$

مشتقة الزاوية = 2

$$= \frac{-1}{2} \cos (2x + 4) + c$$

$$2 \quad \int x^2 \cdot \sin x^3 \, dx$$

مشتقة الزاوية = $3x^2$

$$= \frac{1}{3} \int 3x^2 \sin x^3 \, dx$$

$$= \frac{-1}{3} \cos x^3 + c$$

3 $\int 9 \sin 3x \, dx$

مشتقة الزاوية = 3

$$\left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} \int 3 \sin 3x \, dx = -3 \cos 3x + c$$

4 $\int (x + \sec x \cdot \tan x) \, dx$

نوزج التكامل على الحدين

$$\int x \, dx + \int (\sec x \cdot \tan x) \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \sec x + c$$

5 $\int (\cos x + x^{-2}) \, dx$

نوزج التكامل على الحدين

$$\int \cos x \, dx + \int x^{-2} \, dx$$

طريقة التكامل مباشرة من الجدول

$$= \sin x + \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \sin x - \frac{1}{x} + c$$

ملاحظة

لوحاء التكامل محدد فهذا لا يغير من طريقة الحل والاختلاف فقط في الخطوة الأخيرة حيث نعوض (الحدين - الدنى).

6 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$

$$= [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0$$

$$= 1 - 0 = 1$$

8 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \, dx$

$$= [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\cot \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cot \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 0 + 1 = 1$$

7 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec x \cdot \tan x) \, dx$

$$= [\sec x]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sec \frac{\pi}{3} - \sec 0$$

$$= \frac{2}{1} - 0 = 2$$

9 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (x + \cos x) \, dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \sin x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^0$$

$$= \left(0 + \sin 0\right) + \left(\frac{(-\frac{\pi}{4})^2}{2} + \sin -\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 0 + \frac{\frac{\pi^2}{16}}{2} - \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - 1$$

الاجتماع الايجابي، لو جاء السؤال بهيلة حاصل ضرب "دالة" \times مشتقة

سوف نسميها اجتماع ايجابي وهي:

دالة	مشتقة قوس
$\cos x$	$\sin x$
$\sec^2 x$	$\tan x$
$-\csc^2 x$	$\cot x$

او بالعكس

ثلاثة نماذج الكتاب الخاصة بالجزء الثاني

1 $\int \sin^4 x \cdot \cos x \, dx$
هنا اجتماع $\sin x$ مع $\cos x$ فهو ايجابي

$$\int (\sin x)^4 \cdot \cos x \, dx$$

مشتقة \times قوس

مشتقة داخل القوس $= \cos x$ / يعمل

$$= \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

2 $\int \tan^6 x \cdot \sec^2 x \, dx$
هنا اجتماع $\tan x$ مع $\sec^2 x$ فهو ايجابي

$$\int (\tan x)^6 \cdot \sec^2 x \, dx$$

مشتقة \times قوس

مشتقة داخل القوس $= \sec^2 x$ / يعمل

$$= \frac{\tan^7 x}{7} + c$$

3 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x \, dx$$

مشتقة \times قوس

$$= \left[\frac{2}{1} (\sin x)^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[2\sqrt{\sin x} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\sqrt{\sin \frac{\pi}{2}} - 2\sqrt{\sin \frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

الوصول إلى الاجتهاد الإيجابي من خلال استخدام العلاقات السابقة (القوانين).

الجزء الثالث

مثلة وتمازيق الكتاب الخاصة بالجزء الثالث

1 $\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x} dx$

* من ملاحظة مضمون السؤال سوف نحدد البسط عبارة عن قانون $\sec^2 x$

$$\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x} dx$$

* أصبح الاجتهاد ايجابي بين $\sec^2 x$ و $\tan x$

$$\int \sec^2 x \cdot (\tan x)^{-3} dx$$

مشتقة \times قوس

مشتقة داخل القوس $\sec^2 x$ فعل

$$= \frac{\tan^{-2} x}{-2} + c$$

$$= \frac{-1}{2 \tan^2 x} + c$$

2 $\int \frac{\tan x}{\cos^3 x} dx$

$$\int \frac{1 \cdot \tan x}{\cos^3 x} dx \rightarrow \text{قانون } (\sec^2 x)$$

$$\int \sec^2 x \cdot (\tan x)^1 dx$$

قوس \times مشتقة فعل

$$= \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

3 $\int \csc^2 x \cdot \cos x dx$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x dx$$

اجتاهي

$$\int (\sin x)^{-2} \cdot \cos x dx$$

مشتقة (فعل) \times قوس

$$= \frac{(\sin x)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{\sin x} + c$$

4 $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1 - \cos^2 2x} dx$

* لاحظ ان البسط قانون $(\sin^2 2x)$

$$\int \frac{1 (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}}{\sin^2 2x} dx \rightarrow \text{قانون } \cot 2x$$

$$\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \cdot \csc^2 2x dx$$

مشتقة \times قوس

مشتقة داخل القوس $-2 \csc^2 2x$

$$= \frac{-1}{2} \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} (-2 \csc^2 2x) dx$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} (\cot 2x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{-1}{3} \sqrt{\cot^3 2x} + c$$

5 $\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x) dx$

مشتقة \times قوس

$$= \frac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + c$$

تكامل الدوال المثلثية التربيعية

أولاً، تكامل $(\cos^2 x / \sin^2 x)$: لا يوجد في الجدول تكامل مباشر لدالة $\sin^2 x$ أو $\cos^2 x$ لذلك عند التكامل لهاتين الدالتين كان علينا البحث عن علاقة نتخلص بها من التربيع لذلك:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

عند تكامل $\sin^2 x$

مثلاً $\sin^2 4x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 8x \Rightarrow \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 8x \right) dx$

ضعف الزاوية

مثلاً $\cos^2 6x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 12x \Rightarrow \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 12x \right) dx$

جد: $\int \cos^2 x dx$

$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$

$\int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2 \cos 2x dx$

$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

جد: $\int \sin^2 3x dx$

$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 6x \right) dx$

$\int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \int 6 \cos 6x dx$

$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + c$

جد: $\int \cos^2 2x dx$

$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx$

$\int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int 4 \cos 4x dx$

$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + c$

جد: $\int \sin^2 8x dx$

$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 16x \right) dx$

$\int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} \int 16 \cos 16x dx$

$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{32} \sin 16x + c$

ثانياً، تكامل $(\cot^2 x / \tan^2 x)$ لا يوجد في الجدول تكامل مباشر لدالة $\tan^2 x$ أو $\cot^2 x$ لذلك يجب البحث في الجدول عن تعديل لتكامل الدالتين.

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \Rightarrow \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

استخدمنا هاتين المتطابقتين لسبب: (لأن المتطابقة فيها $\sec^2 x$ وهي موجودة في الجدول مباشرة) والأخرى $\csc^2 x$ وهي أيضاً موجودة في الجدول لذلك فإن هاتين المتطابقتين ثابتتين في الحل لأنها توصلنا إلى الجدول المباشر.

مثال 7 جد: $\int \cot^2 5x \, dx$

$$\int (\csc^2 5x - 1) \, dx$$

$$\int \csc^2 5x \, dx - \int 1 \, dx$$

$$\frac{1}{5} \int 5 \csc^2 5x \, dx - \int 1 \, dx$$

$$= \frac{-1}{5} \cot 5x - x + c$$

مثال 6 جد: $\int \tan^2 7x \, dx$

$$\int (\sec^2 7x - 1) \, dx$$

$$\frac{1}{7} \int 7 \sec^2 7x - \int 1 \, dx$$

$$= \frac{1}{7} \tan 7x - x + c$$

مثال 8 جد: $\int \tan^2 8x \, dx$

$$\int (\sec^2 8x - 1) \, dx$$

$$\frac{1}{8} \int 8 \sec^2 8x - \int 1 \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \tan 8x - x + c$$

كذلك، تكامل $(\csc^2 x / \sec^2 x)$ ، تكامل هاتين الدالتين مباشر من الجدول كما مر عليك سابقاً (الجزء الأول).

مثال ٥ احسب: $\int \csc^2 2x \, dx$

مشتقة الراوية = 2

$$\frac{1}{2} \int \frac{2}{\csc^2 2x} \, dx = \frac{-1}{2} \cot 2x + c$$

مثال ٦ احسب: $\int \sec^2 4x \, dx$

مشتقة الراوية = 4

$$\frac{1}{4} \int \frac{4}{\sec^2 4x} \, dx = \frac{1}{4} \tan 4x + c$$

الجزء الخامس التكامل $\cos^4 x$ ، $\sin^4 x$ ، $\cos^3 x$ ، $\sin^3 x$

أولاً، تكامل $\cos^3 x$ ، $\sin^3 x$ لتكامل مثل هذه الدوال نسمح الخطوات التالية:

١ نجزء الأسس $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x$

٢ $\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x$

٣ نستخدم العلاقات (القوانين) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

٤ بعد استخدام القوانين لاحظ السؤال وفيه احتياطين:

أ لا يوجد فيه مقام فنوزع الأقواس ونجري التكامل (لاحظ المثال الأول).
ب يوجد مقام فنقوم بتحليل البسط ثم نختصر ونجري التكامل (لاحظ المثال الثاني).

قبل أن نسأل نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار الفجر) من الأنترنت واستنساخها عن طريق برامج

التواصل الاجتماعي أو بصورتها باليوبايبل أو أجهزة نقل الملفات إل أصحاب المكتبات وسحبها أو شراء المزممة مستنسخة وببعضها أو عن أي طريق يؤدي إل ضرر المصلحة سواء كان من الوكيل أو غيره لكون فيها أشكال شرعي وقانوني (وغير مصرق النسخة) كل من يقوم بهذه الأفعال - علماً أن ملازمنا موقفة من دار الكتب والوثائق وحاضرة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتخليص الصناعي وثاكد وأحذر أن هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لأن ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وأن عقوبة ذلك موجودة في القانون رقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) وتعديل برقم (٤٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنشوجات المخالفة وأحالتها إل السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات أخرى بحق المخالف -
 لك اقتبس التنويه والتحذير

مثال 2 جد التكامل $\int \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} dx$

نجزء الأس $\int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{1 - \sin x} dx$

نستخدم القانون $\int \frac{(1 - \sin^2 x) \cdot \cos x}{1 - \sin x} dx$

نحلل $\int \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)(\cos x)}{(1 - \sin x)} dx$

مباشرة $\int \cos x dx + \int (\sin x)^1 \cdot \cos x$
مشتقة \times قوس

$= \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + c$

مثال 1 جد التكامل $\int \sin^3 x dx$

$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx$
نجزء الأس

$\int (1 - \cos^2 x) \sin x$
نستخدم القانون

$\int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx$
توزيع القوس والتكامل

$\int \sin x dx - \int (\cos x)^2 \sin x$
مباشرة مشتقة \times قوس

$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$

ثانياً: تكامل $\sin^4 x$, $\cos^4 x$ نتبع فيها الخطوات التالية:

1 نجزء الأس $\sin^4 x = \sin^2 x \cdot \sin^2 x$

$\cos^4 x = \cos^2 x \cdot \cos^2 x$

2 نستخدم القوانين $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$

3 نوزع الأقواس

4 نقوم بحل مشكلة التربيع الذي يقول بعد التوزيع

5 نوفر المشتقة ثم نجري التكامل

مثال 2 جـ التكامل $\int \sin^4 x dx$

$\int \sin^4 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin^2 x dx$ لجزء الأس

$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$ نستخدم القانون

$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) dx$ توزيع الأقواس

$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) dx$

↓ مباشر
↓ جدول
↓ مشكلة

• لا نجري التكامل على الحدين الأول والثاني حتى يتم حل مشكلة $\cos^2 2x$ بالطريقة التي نعلمها سابقاً.

$= \int \frac{1}{4} dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x dx + \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx$ قانون

$= \int \frac{1}{4} dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x dx + \int \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx$

$= \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2 \cos 2x dx + \int \frac{1}{8} dx + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \int 4 \cos 4x dx$

$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$

↓
↓

$= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$

• الحل مطول ويمكن الاختصار بالخطوات.

مثال 4 احسب $\int \cos^4 3x dx$

$$\int \cos^4 3x dx = \int \cos^2 3x \cdot \cos^2 3x dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6x \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6x \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos^2 6x \right) dx$$

جمع

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos^2 6x \right) dx$$

مباشرة جدول مشكلة

$$= \int \frac{1}{4} dx + \int \frac{1}{2} \cos 6x + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 12x \right) dx$$

قانون
(حل المشكلة)

$$= \int \frac{1}{4} dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \int 6 \cos 6x dx + \int \frac{1}{8} dx + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12} \int 12 \cos 12x dx$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{96} \sin 12x + c$$

$$= \frac{3}{8} x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \sin 12x + c$$

الجزء السادس إذا جاء التكامل بزوايا مختلفة.

بجانب ان نؤخذ زوايا السؤال باستخدام العلاقات التالية:

في حالة وجود بسط ومقام $\Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

في حالة وجود $(\cos x)$ في الخارج $\Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

في حالة وجود $(\sin x)$ في الخارج $\Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

في حالة وجود $\Rightarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\sin 2x \cos x$
 $\sin 2x \sin x$

تذكر

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

مثال 2 جد التكامل $\int \sin 6x \cos^2 3x dx$

قانون $\int (2 \sin 3x \cos 3x) \cos^2 3x dx$

$\int 2 \sin 3x \cos^3 3x dx$

$2 \int (\cos 3x)^3 \sin 3x dx$

مشتقة \times قوس

مشتقة داخل القوس $= -3 \sin 3x$

نعمل $2 \cdot \frac{1}{-3} \int (\cos 3x)^3 \cdot (-3 \sin 3x) dx$

$= \frac{-2}{3} \cdot \frac{\cos^4 3x}{4} + c$

$= \frac{-1}{6} \cos^4 3x + c$

مثال 3 احسب $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

$\int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

$\int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{(\cos 2x - \sin 2x)} dx$

$\int (\cos 2x + \sin 2x) dx$

$\frac{1}{2} \int 2 \cos 2x dx + \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x dx$

$= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + c$

أفكار أخرى

الجزء السابع

أحسبه:

أمثلة

3 $\int (1 + \cos 3x)^2 dx$

(فتح الترييح لعدم توفر مشتقة داخل القوس)

$\int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x) dx$

مشكلة مباشر مباشر

$\int (1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x) dx$

$\int (\frac{3}{2} + 2\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 6x) dx$

نوزع التكامل على الحدود

$\int \frac{3}{2} dx + 2 \cdot \frac{1}{3} \int 3\cos 3x dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \int 6\cos 6x$

$= \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$

4 $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$

قابل للتحليل

$\int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) dx$

قانون $\cos 2x$

قانون 1

$\int \cos 2x dx$

مشتقة الزاوية 2

$\frac{1}{2} \int 2\cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$

1 $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx$

$\int \sqrt{\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x} dx$

$\int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x}$

$\int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx$

$\pm \int (\sin x - \cos x) dx$

$= \pm (-\cos x - \sin x) + c$

$= \pm (\cos x + \sin x) + c$

2 $\int \frac{\cos \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx$

$\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ = مشتقة الزاوية

$-2 \int \frac{-\cos \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}} dx$ = نعمل مشتقة الزاوية

$= -2\sin \sqrt{1-x} + c$

6 $\int \cot x \cdot \csc^3 x dx$

مشقة الـ $\csc x$ هي $-\csc x \cot x$
 نحتاج $\csc x$ بجانب $\cot x$ نأخذها من
 $\csc^3 x$ ونبقى $\csc^2 x$ ونوفر السالب.

$$-\int \boxed{-\cot x \cdot \csc x} (\csc x)^2 dx$$

نعمل

$$= \frac{-\csc^3 x}{3} + c$$

5 $\int \frac{2 \sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

مشقة الرابطة = $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

نعمل $2(3) \int \frac{1 \sin \sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow$

$$= -6 \cos \sqrt[3]{x} + c$$

7 $\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2) dx$

نوزع الأقواس

$$\int (\sin 2x \cos^2 2x + 2 \sin 2x - \cos^2 2x - 2) dx$$

مباشر مشكلة مباشر إيجابي

$$\int \left[\sin 2x \cos^2 2x + 2 \sin 2x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) - 2 \right] dx$$

$$\int \left(\sin 2x \cos^2 2x + 2 \sin 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x - 2 \right) dx$$

$$\frac{1}{-2} \int -2 \sin 2x (\cos 2x)^2 dx + \int 2 \sin 2x dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int 4 \cos 4x - \int \frac{5}{2} dx$$

نعمل

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^3 2x}{3} - \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{5}{2} x + c$$

$$= -\frac{1}{6} \cos^3 2x - \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{5}{2} x + c$$

أسئلة من نصيب المحرر

عندما يعطي سؤال تكامل فيه أحد حدود التكامل \int_a^b مجهولة نتبع الخطوات التالية:

أولاً: نجري عملية تكامل اعتيادية. (كما سبق أن تعلمناها)

ثانياً: نعوض الحدود (الأعلى - الأدنى).

ثالثاً: بعد التعويض سوف نحصل على معادلة نحلها ونجد الحد المجهول.

جد قيمة $a \in \mathbb{R}$ إذا كان:

مثال 2

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx = 2$$

1 د / 2004

$$\int_1^4 x (x^2+9)^{-\frac{1}{2}} dx = 2$$

مشتقة داخل القوس $2x$

$$\frac{1}{2} \int_1^4 2x (x^2+9)^{-\frac{1}{2}} dx = 2$$

$$\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} (x^2+9)^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 = 2$$

$$\left[\sqrt{x^2+9} \right]_1^4 = 2$$

$$\sqrt{(4)^2+9} - \sqrt{a^2+9} = 2$$

الأعلى الأدنى

$$\sqrt{25} - \sqrt{a^2+9} = 2$$

$$5 - 2 = \sqrt{a^2+9}$$

بالتربيع

$$9 = a^2 + 9 \Rightarrow a^2 = 0$$

$$a = 0$$

جد قيمة $a \in \mathbb{R}$ إذا علمت أن:

مثال 1

$$\int_1^a \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$$

$$\left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} x \right]_1^a = 2 \left[\tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left[\left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} a \right) - \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] = 2 \left(\tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 \right)$$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} - 1 = 2(1-0)$$

2014 / تمهيدي

2015 / د (1)

$$\left[\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} - 3 = 0 \right] \cdot 2$$

$$a^2 + a - 6 = 0$$

تجربة

$$(a+3)(a-2) = 0$$

$$a+3=0 \Rightarrow a=-3 \text{ مهمل}$$

لأن قيمة a يجب أن تكون أكبر من (1)

كون الحد الأعلى a أكبر من الأدنى (1)

$$a-2=0 \Rightarrow a=2$$

$$\int_a^b (2x+3) dx = 12 \quad \text{إذا كانت}$$

مثال 4

وكانت $a, b \in \mathbb{R}$ جد قيمتي $a+2b=3$

$$\int_a^b (2x+3) dx = 12$$

2 * / 1998

$$\left[\frac{2x^2}{2} + 3x \right]_a^b = 12$$

$$\left[x^2 + 3x \right]_a^b = 12$$

$$(b^2 + 3b) - (a^2 + 3a) = 12$$

$$b^2 + 3b - a^2 - 3a = 12 \quad \dots (1)$$

$$a + 2b = 3 \Rightarrow a = 3 - 2b \quad \dots (2)$$

$$b^2 + 3b - (3 - 2b)^2 - 3(3 - 2b) = 12$$

$$b^2 + 3b - (9 - 12b + 4b^2) - 9 + 6b - 12 = 0$$

$$b^2 + 3b - 9 + 12b - 4b^2 - 9 + 6b - 12 = 0$$

$$-3b^2 + 21b - 30 = 0 \Rightarrow 3b^2 - 21b + 30 = 0$$

$$b^2 - 7b + 10 = 0$$

$$(b-5)(b-2) = 0$$

$$\text{أما } b-5=0 \Rightarrow b=5$$

$$a = 3 - 2b = 3 - 2(5) = 3 - 10$$

$$a = -7$$

$$\text{أو } b-2=0 \Rightarrow b=2$$

$$a = 3 - 2b = 3 - 2(2) = 3 - 4$$

$$a = -1$$

$$\int_{-1}^a (x - x^2) dx = \frac{-9}{4} \quad \text{إذا كانت}$$

مثال 3

جد قيمة $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-1}^a (x - x^2) dx = \frac{-9}{4}$$

1 * / 1998

$$\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^a = \frac{-9}{4}$$

$$\left[\frac{(a)^2}{2} - \frac{(a)^3}{3} \right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} \right] = \frac{-9}{4}$$

$$\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{-9}{4}$$

بحرية المعادلة $\times (4)$

$$\frac{a^2}{2} (4) - \frac{a^3}{3} (4) - \frac{1}{2} (4) + \frac{1}{3} (4) = \frac{-9}{1}$$

$$2a^2 - a^3 - 1 = -9 \Rightarrow a^3 - 2a^2 + 1 - 9 = 0$$

$$a^3 - 2a^2 - 8 = 0$$

$$(a^2 + 2)(a^2 - 4) = 0$$

$$\text{أما } a^2 + 2 = 0 \text{ يعطي } \notin \mathbb{R}$$

$$\text{أو } a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \text{ الجذر}$$

$$a = \pm 2$$

$$a = 2$$

$$a = -2 \rightarrow$$

نعمل لأنها أصغر
من الحد (الأدنى)

إذا كانت للمنحنى $f(x) = (x-3)^3 + 1$

نقطة انقلاب (a, b) جد القيمة العددية

$$\int_0^b \bar{f}(x) dx - \int_0^a \bar{\bar{f}}(x) dx$$

$$f(x) = (x-3)^3 + 1$$

$$\bar{f}(x) = 3(x-3)^2 \quad (1) \Rightarrow \bar{f}(x) = 3(x-3)$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 6(x-3)(1) \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x) = 6(x-3)$$

$$[6(x-3) = 0] \div 6 \Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = (3-3)^3 + 1 = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$(3,1) \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{نقطة انقلاب}$$

$$\int_0^b \bar{f}(x) dx - \int_0^a \bar{\bar{f}}(x) dx$$

$$\int_0^1 3(x-3)^2 dx - \int_0^3 6(x-3) dx$$

$$= \left[\frac{3(x-3)^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{6(x-3)^2}{2} \right]_0^3$$

$$= [(x-3)^3]_0^1 - [3(x-3)^2]_0^3$$

$$= [(1-3)^3 - (0-3)^3] - [3(3-3)^2 - 3(0-3)^2]$$

$$= [(-2)^3 - (-3)^3] - [0 - 3(-3)^2]$$

$$= -8 + 27 + 27 = 46$$

لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث

$k \in \mathbb{R}$ ، دالة نهايتها الصغرى (-5)

$$\int_1^3 f(x) dx$$

$$f(x) = x^2 + 2x + k \quad \text{تعويض}$$

$$\bar{f}(x) = 2x + 2$$

$$2x + 2 = 0 \Rightarrow [2x = -2] \div 2$$

$$x = -1, \quad y = -5, \quad (-1, -5)$$

$$f(x) = x^2 + 2x + k$$

$$-5 = (-1)^2 + 2(-1) + k$$

$$-5 = 1 - 2 + k \Rightarrow k = -4$$

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (x^2 + 2x - 4) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x \right]_1^3$$

$$= \left[\frac{(3)^3}{3} + (3)^2 - 4(3) \right] - \left[\frac{(1)^3}{3} + (1)^2 - 4(1) \right]$$

$$= (9 + 9 - 12) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 4 \right)$$

$$= (6) - \left(\frac{1}{3} - 3 \right)$$

$$= 6 - \frac{1}{3} + 3 = \frac{9}{1} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{26}{3}$$

تكامل الدالة التي تحتوي على مطلق

نضع الخطوات التالية عند تكامل دالة تحتوي على مطلق.

أولاً : نأخذ ما بين المطلق ونساويه الى الصفر ونجد قيمة x .

ثانياً : بعد إيجاد قيمة x ونسبى الحد الفاصل نجعل الدالة مزدوجة (منشطرة).

$$f(x) = \begin{cases} + (\text{الدالة}) & x \geq c \\ - (\text{الدالة}) & x < c \end{cases}$$

نضع قيمة x هنا
ولتكن $x = c$



ثالثاً : تكامل بالشكل التالي :

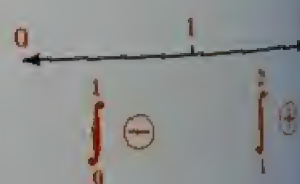
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c -(\text{الدالة}) dx + \int_c^b +(\text{الدالة}) dx$$

الحد الأعلى b ←
قيمة x (الحد الفاصل) c ←
الحد الأدنى a ←

مثال 1 : لتكن $f(x) = |x-1|$ أوجد $\int_0^2 f(x) dx$

نأخذ ما بين المطلق ونساويه الى الصفر $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$$f(x) = \begin{cases} + (x-1) & x \geq 1 \\ - (x-1) & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$



$$\int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 (-x+1) dx + \int_1^2 (x-1) dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2$$

$$= \left[\left(-\frac{(1)^2}{2} + 1 \right) - (0) \right] + \left[\left(\frac{(2)^2}{2} - 2 \right) - \left(\frac{(1)^2}{2} - (1) \right) \right]$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + \left(\frac{4}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

تكن $f(x) = |x+1|$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

هنا قيمة x تساوي الحد الأدنى لذلك تكامل جزء واحد من الدالة .

$$f(x) = \begin{cases} +(x+1) \\ -(x+1) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$

* المطلوب تكامل من (-1) الى (1) اي أكبر ويساوي (-1) تكامل الشرط الأول لأن الشرط الأول $-1 \geq$ وفقاً للمطلوب .

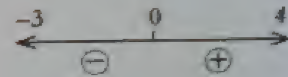
$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (x+1) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 \\ &= \left(\frac{(1)^2}{2} + 1 \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right) \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 1 = 2 \end{aligned}$$

تكن $f(x) = |x|$ أوجد

$$\int_{-3}^4 f(x) dx$$

نأخذ ما بداخل المطلق

$$f(x) = \begin{cases} +x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \int_{-3}^4 |x| dx &= \int_{-3}^0 -x dx + \int_0^4 x dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 \\ &= \left[\left(-\frac{(0)^2}{2} - \frac{-(-3)^2}{2} \right) \right] + \left[\frac{(4)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right] \\ &= -\left(\frac{-9}{2} \right) + \frac{16}{2} \\ &= \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2} = 12 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

تحذير هام جداً

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايضاً لها بالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء المزمة مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال شرعي وقانوني (وغير مبرر الذمة) كل من يقوم بهذه الأفعال . علماً ان ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحائزة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتؤكد وأحذر ان هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون العراقي المرقم (٣١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف . لذا اقتضى التنويه والتحذير

أثبت أن: $\int_{-2}^4 |3x-6| dx = 30$

مثال 4

$3x-6=0 \Rightarrow [3x=6] \div 3 \Rightarrow x=2$



$f(x) = \begin{cases} + (3x-6) \\ - (3x-6) \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x-6 & x \geq 2 \\ -3x+6 & x < 2 \end{cases}$

$\int_{-2}^4 |3x-6| dx = \int_{-2}^2 (-3x+6) dx + \int_2^4 (3x-6) dx$

$= \left[-\frac{3x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 6x \right]_2^4$

$= \left[\left(-\frac{3(2)^2}{2} + 6(2) \right) - \left(-\frac{3(-2)^2}{2} + 6(-2) \right) \right] + \left[\left(\frac{3(4)^2}{2} - 6(4) \right) - \left(\frac{3(2)^2}{2} - 6(2) \right) \right]$

$= \left[\left(-\frac{12}{2} + 12 \right) - \left(-\frac{12}{2} - 12 \right) \right] + \left[\left(\frac{48}{2} - 24 \right) - \left(\frac{12}{2} - 12 \right) \right]$

$= (6) - (-18) + (0) - (-6)$

$= 6 + 18 + 6 = 30$

RHS = LHS

Notes

الرياضيات

الملاحظات

تكامل الدالة ذات الشطرين

- أولاً ، نبحث استمرارية الدالة عند الحد الفاصل .
ثانياً ، تكامل شطري الدالة حسب حدود التكامل .

شرح الخطوات مع مثال (3)

إذا كانت

مثال 2

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 3 \\ 6 & x < 3 \end{cases}$$

$$\int_1^4 f(x) dx$$

أوجد

$$f(3) = 2(3) = 6$$

الصورة

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} 2x = 2(3) = 6 = L_1$$

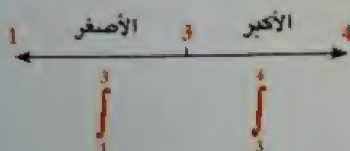
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} 6 = 6 = L_2$$

الغاية موجودة

$$L_1 = L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

الدالة مستمرة



$$\int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 6 dx + \int_3^4 2x dx$$

$$= [6x]_1^3 + [x^2]_3^4$$

$$= [6(3) - 6(1)] + [(4)^2 - (3)^2]$$

$$= (18 - 6) + (16 - 9)$$

$$= 12 + 7 = 19$$

إذا كانت

مثال 1

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ 3 & x < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^5 f(x) dx$$

أوجد

$$f(1) = 2(1) + 1 = 3$$

الصورة

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 3 = 3 = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x+1 = 2(1) + 1 = 3 = L_2$$

الغاية موجودة

$$L_1 = L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

الدالة مستمرة



$$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^1 3 dx + \int_1^5 (2x+1) dx$$

$$= [3x]_0^1 + [x^2 + x]_1^5$$

$$= [3(1) - 3(0)] + [(5)^2 + 5 - (1)^2 - 1]$$

$$= (3 - 0) + (25 + 5 - 1 - 1)$$

$$= 3 + 30 - 2 = 31$$

$$\int_{-1}^3 f(x) dx$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \forall x \geq 0 \\ 2x & \forall x < 0 \end{cases}$$

إذ كانت

$$f(0) = 3(0)^2 = 0 \quad \text{الصورة}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 3(0)^2 = 0 = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 2(0) = 0 = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

(الصورة = النهاية)

موضع الحد الفاصل (0) بمائة \leq أو \geq .

أو التمر تحتوي على علامة المساواة لمحدد الصورة.

بالحذ نهاية \lim عند $x \rightarrow$ من الحد الفاصل.

الحد الفاصل (0) بمائة مضمرة (النهاية = الصورة).



$$\int_{-1}^0 + \int_0^3$$

تكامل الحد الذي فيه علامة أصغر تكامل الحد الذي فيه علامة أكبر أو يساوي

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^3 3x^2 dx$$

$<$ الشطر الذي فيه أصغر الشطر الذي فيه أكبر أو يساوي \geq

$$\begin{aligned} &= [x^2]_{-1}^0 + [x^3]_0^3 \\ &= [(0)^2 - (-1)^2] + [(3)^3 - (0)^3] \\ &= (0 - 1) + (27 - 0) \\ &= -1 + 27 = 26 \end{aligned}$$

أولاً : اشتقاق الدالة التي تحتوي على (Ln).

$$y = \text{Ln} (f(x)) \Rightarrow \bar{y} = \frac{\bar{f}(x)}{f(x)} = \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{نفس الدالة}}$$

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

مثال

5 $y = (\text{Ln } x)^2$

* قوس مرفوع الى أس / نتبع قاعدة اشتقاق قوس مرفوع الى أس.

$$\frac{dy}{dx} = 2 (\text{Ln } x)^1 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

مشتقة داخل القوس

$$= \frac{2 \text{Ln } x}{x}$$

1 $y = \text{Ln} (3x^2 + 4)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2 + 4}$$

2 $y = \text{Ln} (3x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

6 $y = \text{Ln} (2 - \cos x)$

مشتقة الزاوية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 - (-\sin x)(1)}{2 - \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

3 $y = \text{Ln} \frac{x}{2} \Rightarrow y = \text{Ln} \frac{1}{2} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

4 $y = \text{Ln} (x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$$



9 $y = \ln \tan^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 (\tan x)^1 \cdot \sec^2 x}{\tan^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sec^2 x}{\tan x}$$

توضيح

$\tan^2 x$ يعتبر قوس مرفوع الى أس

$$\begin{matrix} 2 & (\tan x)^1 & \cdot & \sec^2 x \\ \text{أس} & \text{القوس} & & \text{مشتقة داخل قوس} \end{matrix}$$

7 $y = \ln \left(\frac{1}{x} \right)^3$

$$y = \ln \frac{1}{x^3} \Rightarrow y = \ln x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^{-4}}{x^{-3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{x}$$

8 $y = x^2 \cdot \ln x$

حاصل ضرب دالتين

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2 \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 2x \\ &= x + 2x \ln x \end{aligned}$$

ثانياً، اشتقاق الدالة التي تحتوي على e .

$$y = e^{f(x)} \Rightarrow \bar{y} = \bar{f}(x) \cdot e^{f(x)}$$

\downarrow مشتقة الأس \downarrow نفس الدالة

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

مثال

3 $y = x^2 \cdot e^x$

حاصل ضرب دالتين

$$\bar{y} = x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2x$$

$$\bar{y} = x^2 e^x + 2x e^x$$

1 $y = e^{\tan x}$

$$\bar{y} = \sec^2 x \cdot e^{\tan x}$$

2 $y = e^{-5x^2+3x+5}$

$$\bar{y} = (-10x+3) e^{-5x^2+3x+5}$$

مثال: ثالثاً، اشتقاق الدالة الأسية (قانون مرفوع)

$$y = a^{f(x)} \Rightarrow \bar{y} = a^{f(x)} \cdot \text{Lna} \cdot \bar{f}(x)$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 نفس (العدد) مشتقة
 الدالة Ln الأس

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

مثال

5 $y = e^{x^2} \cdot \text{Ln} 2x$

حاصل ضرب دالتين

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{x^2} \cdot \frac{2}{2x} + (\text{Ln} 2x) 2x e^{x^2} \\ &= \frac{e^{x^2}}{x} + 2x e^{x^2} \text{Ln} 2x \end{aligned}$$

6 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

حاصل قسمة دالتين

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{2x} - e^0 - e^0 + e^{-2x}) - (e^{2x} + e^0 + e^0 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x} - e^{2x} - 1 - 1 - e^{-2x}}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

1 $y = 3^{2x-5}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3^{2x-5} \cdot \text{Ln}(3) \cdot 2 \\ &= 2 \text{Ln}(3) \cdot 3^{2x-5} \end{aligned}$$

2 $y = 2^{-x^2}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2^{-x^2} \cdot \text{Ln}(2) \cdot -2x \\ &= -2x \text{Ln}(2) \cdot 2^{-x^2} \end{aligned}$$

3 $y = 5^{\sin x}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5^{\sin x} \cdot \text{Ln}(5) \cdot \cos x \\ &= \cos x \cdot \text{Ln}(5) \cdot 5^{\sin x} \end{aligned}$$

4 $y = \cos(e^{\pi x})$

انتبه! هنا $e^{\pi x}$ هي زاوية \cos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\sin(e^{\pi x}) \cdot \pi e^{\pi x} \\ &= -\pi e^{\pi x} \cdot \sin e^{\pi x} \end{aligned}$$

مشتقة الزاوية

8 $y = 7^{\frac{x}{4}}$

$$\frac{dy}{dx} = 7^{\frac{x}{4}} \cdot \ln(7) \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\ln(7) \cdot 7^{\frac{x}{4}}}{4}$$

7 $y = 9^{\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = 9^{\sqrt{x}} \cdot \ln(9) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مشتقة داخل الجذر = مشتقة الجذر نفسه الجذر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9^{\sqrt{x}} \cdot \ln 9}{2\sqrt{x}}$$

والهاء تكامل الدالة التي تحتوي على (e).
نوفر مشتقة الأس بعدها تهمل المشتقة
وتبقى $e^{f(x)}$ فقط وينتهي الحل.

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{f(x)} + c$$

جد التاكاملات التالية:

3 $\int \sec^2 3x \cdot e^{\tan 3x} dx$

3 $\sec^2 3x \leftarrow \tan 3x$ مشتقة الـ

$$\frac{1}{3} \int \frac{3 \sec^2 3x \cdot e^{\tan 3x}}{\text{تهمل}} dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{\tan 3x} + c$$

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \cdot \sin x dx$

بهر مشتقة الأس وهي $(-\sin x)$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \cdot \frac{(-\sin x) dx}{\text{تهمل}}$$

$$= [-e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (-e^{\cos \frac{\pi}{2}}) - (-e^{\cos 0})$$

$$= -e^0 + e^1 = -1 + e$$

4 $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ مشتقة الـ \sqrt{x} هي

$$\int_1^4 \frac{1 \cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \rightarrow \text{مشتقة الـ } \sqrt{x} \text{ تهمل}$$

$$= [e^{\sqrt{x}}]_1^4$$

$$= e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}}$$

$$= e^2 - e^1$$

2 $\int x e^{x^2} dx$

مشتقة الأس $= 2x$

$$\frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

7 $\int_0^1 (1+e^x)^2 \cdot e^x dx$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{(1+e^x)^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{(1+e^1)^3}{3} - \frac{(1+e^0)^3}{3} \\ &= \frac{(1+e)^3}{3} - \frac{(1+1)^3}{3} \\ &= \frac{(1+e)^3 - 8}{3} \end{aligned}$$

5 $\int_0^{\ln 2} e^{-x} dx$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{\ln 2} \text{عكس} e^{-x} dx \\ &= \left[-e^{-x} \right]_0^{\ln 2} \\ &= (-e^{-\ln 2}) - (-e^0) \\ &= -e^{\ln 2^{-1}} + e^0 \\ &= -2^{-1} + 1 \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

8 $\int_1^2 x e^{-\ln x} dx$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 x e^{-\ln x^{-1}} dx \\ &= \int_1^2 x e^{\ln \frac{1}{x}} dx \\ &= \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int_1^2 1 dx \\ &= [x]_1^2 \\ &= 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

6 $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{\ln 3}^{\ln 5} 2e^{2x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\ln 3}^{\ln 5} \\ &= \frac{1}{2} e^{2\ln 5} - \frac{1}{2} e^{2\ln 3} \\ &= \frac{1}{2} e^{\ln 5^2} - \frac{1}{2} e^{\ln 3^2} \\ &= \frac{1}{2} (25) - \frac{1}{2} (9) = \frac{25}{2} - \frac{9}{2} \\ &= \frac{16}{2} = 8 \end{aligned}$$

خامساً، تكامل الدالة بالشكل $\left(\frac{\text{مشتقة البقام}}{\text{البقام}} \right)$

عندما يكون البسط عبارة عن مشتقة البقايم موجود في البقام فإن البسط يهمل ونأخذ البقام $|\text{Ln}|$ فقط.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \text{Ln} |f(x)| + c$$

جد التآملات التالية:

مثلة

3 $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx$

$$= [\text{Ln} |x^3+4x+1|]_0^1$$

$$= \text{Ln} ((1)^3+4(1)+1) - \text{Ln} ((0)^3+4(0)+1)$$

$$= \text{Ln} 6 - \text{Ln} 1 = \text{Ln} 6$$

1 $\int_0^3 \frac{1}{x+1} dx$

$$= [\text{Ln} |x+1|]_0^3$$

$$= \text{Ln} (3+1) - \text{Ln} (0+1)$$

$$= \text{Ln} (4) - \text{Ln} (1)$$

$$= \text{Ln} 4$$

4 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x} dx$

$$= [\text{Ln} |2+\tan x|]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \text{Ln} (2+\tan \frac{\pi}{4}) - \text{Ln} (2+\tan -\frac{\pi}{4})$$

$$= \text{Ln} (2+1) - \text{Ln} (2-1) \quad \leftarrow \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$= \text{Ln} 3 - \text{Ln} 1 = \text{Ln} 3$$

2 $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx$

$$= [\text{Ln} |x^2+9|]_0^4$$

$$= \text{Ln} (4^2+9) - \text{Ln} (0^2+9)$$

$$= \text{Ln} 25 - \text{Ln} 9 = \text{Ln} \frac{25}{9} = \text{Ln} \frac{5}{3}$$

$$= \text{Ln} \left(\frac{5}{3} \right)^2 = 2 \text{Ln} \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned}
 6 \quad & \int \tan x \, dx \\
 & \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\
 & = \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx \\
 & = -\ln |\cos x| + c \Rightarrow \ln |\cos^{-1} x| + c \\
 & = \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| + c = \ln |\sec x| + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad & \int \cot x \, dx \\
 & \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \\
 & \text{مشتقة الـ } \cos x = \sin x \\
 & = \ln |\sin x| + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad & \int \cot^3 5x \, dx \\
 & \int \cot^2 5x \cdot \cot 5x \, dx \\
 & \int (\csc^2 5x - 1) \cdot \cot 5x \, dx \\
 & \int (\cot 5x \cdot \csc^2 5x - \cot 5x) \, dx \\
 & \int \cot 5x \cdot \csc^2 5x \, dx - \int \cot 5x \, dx \\
 & \text{طريقة الاحياشي} \quad \text{طريقة الـ } \ln \\
 & = \frac{1}{5} \int \cot 5x (-5 \csc^2 5x) - \frac{1}{5} \int \frac{\sin 5x}{\sin 5x} \, dx \\
 & \text{لعمل} \\
 & = \frac{-1}{5} \frac{\cot^2 5x}{2} - \frac{1}{5} \ln |\sin 5x| + c \\
 & = \frac{-1}{10} \cot^2 5x - \frac{1}{5} \ln |\sin 5x| + c
 \end{aligned}$$

Notes

الرياضيات

الملاحظات

إيجاد مساحة المنطقة المستوية

- أولاً : إذا طلبت مساحة منطقة محددة بدالة $f(x)$ ومحور السينات وبدون فترة .
- 1 تساوي الدالة $f(x)$ للصفر ونجد $(x) \leftarrow$ نجد نقاط التقاطع مع محور السينات .
- 2 احتمالات قيم x .

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad \text{حدود التكامل}$$

(a) إذا كانت لدينا قيمتان فقط (a)
 a, b هي قيم x

$$A_1 = \int_a^b f(x) dx$$

$$A_2 = \int_b^c f(x) dx$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

(a) إذا كانت لدينا ثلاث قيم

(b) إذا كانت لدينا ثلاث قيم (x)
 أصغر قيمة لـ x أكبر قيمة لـ x

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + (1)^2 \right]_0^1 - [0]$$

الحد الأدنى الحد الأعلى

$$= \frac{(1)^4}{4} - 1 + 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{(2)^4}{4} - (2)^3 + (2)^2 \right] - \left[\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + (1)^2 \right]$$

$$(4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right)$$

مثال 1 جد المساحة المحددة بالمنحني

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \quad \text{ومحور السينات}$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad (\text{نصفر الدالة})$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad (\text{عامل مشترك})$$

تجربة

$$x(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

(أصغر رقم) (أكبر رقم)

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$$

$$= [0] - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{4(-1)^3}{3} + \frac{3(-1)^2}{2} \right]$$

$$= - \left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right] \quad \text{توحيد مقامات}$$

$$= - \left(\frac{3-16+18}{12} \right) \Rightarrow A_2 = \frac{-5}{12}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{8}{3} \right| + \left| \frac{-5}{12} \right| \Rightarrow A = \frac{8}{3} + \frac{5}{12}$$

$$A = \frac{32+5}{12} = \frac{37}{12} \text{ unit}^2$$

جد المساحة المحددة بالدالة

$$f(x) = x^4 - x^2 \quad \text{ومحور السينات}$$

$$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$\text{بالحذر} \quad x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{بالحذر} \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$A_1 = \int_{-1}^0 (x^4 - x^2) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0$$

$$A_1 = [0] - \left[\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} \right]$$

$$= 0 - \frac{1}{4} \Rightarrow A_2 = \frac{-1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{1}{4} \right| + \left| \frac{-1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \text{ (unit)}^2$$

مثال 2

جد المساحة المحددة بالمنحنى

$$y = x^3 + 4x^2 + 3x \quad \text{ومحور السينات}$$

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$x(x+3)(x+1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$



$$A_1 = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-3}^{-1}$$

$$A_1 = \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{4(-1)^3}{3} + \frac{3(-1)^2}{2} \right] - \left[\frac{(-3)^4}{4} + \frac{4(-3)^3}{3} + \frac{3(-3)^2}{2} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{3-16+18}{12} \right) - \left(\frac{81-144+54}{4} \right)$$

$$= \left(\frac{5}{12} \right) - \left(\frac{-9}{4} \right) = \frac{5}{12} + \frac{9}{4} \Rightarrow A_1 = \frac{31}{6}$$

$$A_2 = \int_{-1}^0 (x^3 + 4x^2 + 3x) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^0$$

$$A_1 = -\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3-5}{15}$$

$$A_1 = \frac{-2}{15}$$

$$A_2 = \int_0^1 (x^4 - x^2) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$A_2 = \left(\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^3}{3} \right) - (0)$$

$$A_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \Rightarrow A_2 = \frac{-2}{15}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{-2}{15} \right| + \left| \frac{-2}{15} \right| \Rightarrow A = \frac{4}{15} \text{ unit}^2$$

Notes

الرياضيات

الملاحظات

ثانياً ، إذا طلبت مساحة منطقة محددة بدالة $f(x)$ ومحور السينات والفترة $[a, b]$ أو المستقيمين $x = a$, $x = b$.

خطوات الحل

1) نساوي الدالة للصفر ونجد قيم (x) .

أ) إذا كانت قيم x لا تنتمي للفترة $[a, b]$ نهمل ونجد المساحة مباشرة من حدود الفترة a, b من السؤال .

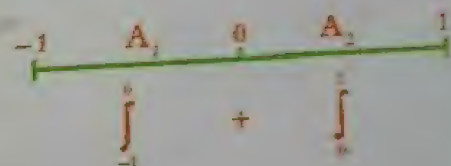
تمثل حدود فترة السؤال $\left\{ \begin{array}{l} \text{تمثل حدود فترة السؤال} \\ A = \int_a^b f(x) dx \end{array} \right.$

لاحظ مثال (1)

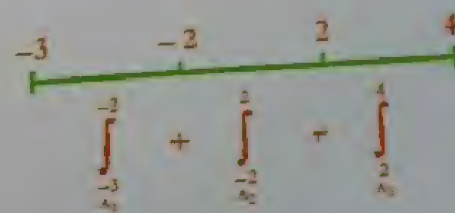
ب) إذا كانت قيم x هي نفسها حدود الفترة أي أن $x = a$, $x = b$ نجد المساحة مباشرة كما في فرع أ .

2) إذا كانت قيم $x \in [a, b]$ نجزء الفترة .

مثال توضيحي $f(x) = x^2$ $x \in [-1, 1]$
 $x^2 = 0 \Rightarrow 0 \in [-1, 1]$



مثال توضيحي $f(x) = x^2 - 4$ $[-3, 4]$
 بالجذر $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$
 $x = \pm 2 \in [-3, 4]$



$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots$



جد مساحة المنطقة المحددة

مثال 5

بينحني بالدالة $y = x^4 - x$ ومحور السينات والمسنطينين $x = 1$, $x = -1$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{أما } x = 0$$

$$\text{أو } x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$



$$A_1 = \int_{-1}^0 (x^4 - x) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0$$

$$A_1 = [0] - \left[\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^2}{2} \right]$$

$$A_1 = -\left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \quad \text{توجيه مقامات}$$

$$A_1 = \frac{2+5}{10} \Rightarrow A_1 = \frac{7}{10}$$

$$A_2 = \int_0^1 (x^4 - x) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$A_2 = \left[\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^2}{2} \right] - [0]$$

$$A_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{2-5}{10} \Rightarrow A_2 = -\frac{3}{10}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{7}{10} \right| + \left| -\frac{3}{10} \right| = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$A = 1 \text{ (unit}^2\text{)}$$

جد مساحة المنطقة المحددة

مثال 6

بينحني بالدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 2]$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$\text{أما } x = 0$$

$$\text{أو } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$



$$A_1 = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0$$

$$A_1 = [0] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2 \right]$$

$$A_1 = -\left(\frac{16}{4} - 8 \right) = -(4 - 8) \Rightarrow A_1 = 4$$

$$A_2 = \int_0^2 (x^3 - 4x) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2$$

$$A_2 = \left[\frac{(2)^4}{4} - 2(2)^2 \right] - [0]$$

$$A_2 = \frac{16}{4} - 8 \Rightarrow A_2 = -4$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = |4| + |-4|$$

$$A = 4 + 4 \Rightarrow A = 8 \text{ unit}^2$$

تمهيد / 2000





$$A_3 = \int_1^3 (x^2 - 1) dx$$

$$A_3 = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^3$$

$$A_3 = \left(\frac{(3)^3}{3} - 3 \right) - \left(\frac{(1)^3}{3} - 1 \right)$$

$$A_3 = (9 - 3) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right)$$

$$A_3 = 6 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{1} - \frac{1}{3}$$

$$A_3 = \frac{21 - 1}{3} \Rightarrow A_3 = \frac{20}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$A = \left| \frac{4}{3} \right| + \left| \frac{-4}{3} \right| + \left| \frac{20}{3} \right|$$

$$A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3}$$

$$A = 9 \frac{1}{3} \text{ unit}^2$$

مثال 7 جد مساحة المنطقة التي

يحددها مخطط الدالة $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x = 3$ ، $x = 1$

$$A = \int_1^3 x^2 dx$$

$$x^2 = 0$$

$$\frac{x}{x} = 0 \notin [1, 3]$$

نصل

$$A = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3$$

$$A = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3}$$

$$A = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{26}{3} \text{ unit}^2$$

$$A = 8 \frac{2}{3} \text{ unit}^2$$

جد مساحة المنطقة المحددة

مثال 6

بالمنحنى $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 3]$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^{-1}$$

$$A_1 = \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1) \right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} - (-2) \right]$$

$$A_1 = \left(\frac{-1}{3} + 1 \right) - \left(\frac{-8}{3} + 2 \right)$$

$$A_1 = \frac{-1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2 = \frac{7}{3} - 1$$

$$A_1 = \frac{7 - 3}{3} \Rightarrow A_1 = \frac{4}{3} \text{ وحدة مساحية}$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1$$

$$A_2 = \left[\frac{(1)^3}{3} - 1 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1) \right]$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \left(\frac{-1}{3} + 1 \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{1}$$

$$A_2 = \frac{2 - 6}{3} \Rightarrow A_2 = \frac{-4}{3}$$

3 د 2013



الدوال الدائرية

$\tan x = -1$ 2

* الزاوية التي لها $\tan = 1$ هي $\frac{\pi}{4}$
اذن زاوية الإسناد $= \frac{\pi}{4}$

نحدد الربع الذي فيه \tan سالب وهو الربع الثاني والرابع

الزاوية الإسناد $= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ الثاني / $x = \pi - \frac{\pi}{4}$

الزاوية الإسناد $= 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ الرابع / $x = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

ثانياً: تذكرات:

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

أمثلة

$\sin \frac{-\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin \frac{-\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

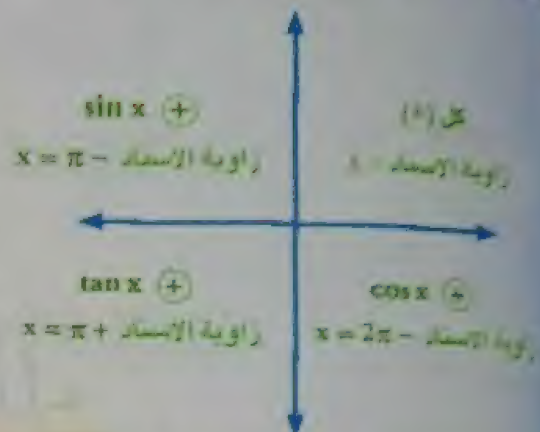
السالب مع \cos يهمل

$\tan \frac{-\pi}{4} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$

\tan مع زاوية سالبة نفس خاصية \sin

مراجعة

أولاً: إشارات الدوال حسب الأرباع:



مثلة توضيحية

عند إيجاد قيمة الزاوية x

مثلاً $\cos x = \frac{1}{2}$

نعرف ان الزاوية التي لها $\cos = \frac{1}{2}$ هي الزاوية $\frac{\pi}{3}$

اذن ← زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$

ونحدد الربع و $\cos x$ موجب في الربع الاول والرابع

a $\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ زاوية الإسناد $\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ الأول

b $\Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ زاوية الإسناد $\Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ الرابع

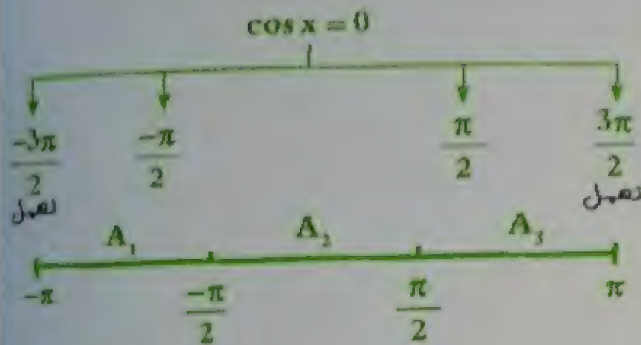
$x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{5\pi}{3}$

جد المساحة المحددة بمنحنى

مثال 9

بالدالة $y = \cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi, \pi]$



$$A_1 = \int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos x \, dx$$

$$A_1 = [\sin x]_{-\pi}^{-\pi/2}$$

$$A_1 = (\sin -\frac{\pi}{2}) - (\sin -\pi)$$

$$A_1 = -\sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi$$

$$A_1 = -1 + 0 \Rightarrow A_1 = -1$$

$$A_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$$

$$A_2 = [\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$A_2 = (\sin \frac{\pi}{2}) - (\sin -\frac{\pi}{2})$$

$$A_2 = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}$$

$$A_2 = 1 + 1 \Rightarrow A_2 = 2$$

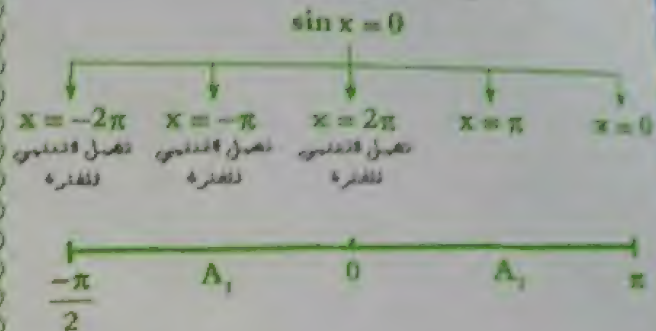
$$A_3 = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx$$

$$A_3 = [\sin x]_{\pi/2}^{\pi}$$

جد المساحة المحددة بمنحنى

مثال 8

بالدالة $y = \sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$



$$A_1 = \int_{-\pi/2}^0 \sin x \, dx$$

$$A_1 = [-\cos x]_{-\pi/2}^0$$

$$A_1 = [-\cos 0] - [-\cos -\frac{\pi}{2}]$$

$$A_1 = -(1) + 0 = -1 \Rightarrow A_1 = -1$$

$$A_2 = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$A_2 = [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$A_2 = (-\cos \pi) - (-\cos 0)$$

$$A_2 = -(-1) + 1 = 1 + 1 \Rightarrow A_2 = 2$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = |-1| + |2|$$

$$A = 1 + 2 = 3 \Rightarrow A = 3 \text{ unit}^2$$

$$A_1 = \frac{-1}{3}(-1) + \frac{1}{3}(1)$$

$$A_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow A_1 = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x \, dx$$

14/2016

$$A_2 = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3 \sin 3x \, dx$$

$$A_2 = \left[-\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$A_2 = \left[-\frac{1}{3} \cos 3 \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] - \left[-\frac{1}{3} \cos 3 \left(\frac{0}{3} \right) \right]$$

$$A_2 = \frac{-1}{3} \cos \frac{3\pi}{3} + \frac{1}{3} \cos \pi$$

$$A_2 = \frac{-1}{3}(0) + \frac{1}{3}(-1) \Rightarrow A_2 = \frac{-1}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{2}{3} \right| + \left| \frac{-1}{3} \right| = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow A = 1 \text{ unit}^2$$

$$A_1 = (\sin \pi) - (\sin \frac{\pi}{2})$$

$$A_1 = 0 - 1 \quad A_2 = -1$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$A = |-1| + |2| + |-1| \Rightarrow A = 4 \text{ unit}^2$$

مثال 20

جد المساحة المحددة بهبطي

بالدالة $y = \sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\sin 3x = 0 \begin{cases} 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ 3x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$



$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x \, dx$$

بحث لوفير مشقة الراوية = 3

$$A_1 = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3 \sin 3x \, dx$$

$$A_1 = \left[-\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$A_1 = \left[-\frac{1}{3} \cos 3 \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] - \left[-\frac{1}{3} \cos 3(0) \right]$$

$$A_1 = \frac{-1}{3} \cos \pi + \frac{1}{3} \cos 0$$

تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الاتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

$$A_1 = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} - 0 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx$$

2 د / 2006

2016 / خارج القطر / د 2

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos 2x$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] - \left[\frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{2} \sin \pi \right) - \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(1)$$

$$A_2 = 0 - \frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{1}{2} \right| + \left| -\frac{1}{2} \right| \Rightarrow A = 1 \text{ unit}^2$$

جد المساحة المحددة بمنحنى

مثال 11

بالدالة $y = 2 \cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

$$y = 2 \cos^2 x - 1$$

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x \quad \text{قانون}$$

$$\cos 2x = 0 \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\left[2x = \frac{\pi}{2} \right] \div 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\left[2x = \frac{3\pi}{2} \right] \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$



$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$$

يجب توفير مشتقة الزاوية $2 =$

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos 2x \, dx$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{2} \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) \right] - \left[\frac{1}{2} \sin 2(0) \right]$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \sin 0 \right)$$



مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين

إذا طلبت مساحة بين منحنين $f(x)$, $g(x)$

1 تساوي الدالتين $f(x) = g(x)$ ثم نصفر الدالة $f(x) - g(x) = 0$
الدالة الثانية = الدالة الأولى

2 قبل كل شيء، الدالة $f(x) - g(x) = 0$ هي الدالة التي نكاملها وبعدها نجد x

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

ملاحظة: لو كانت لدينا دالتين $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$

$$x = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x - \sqrt[3]{x} = 0$$

الدالة الأولى = الدالة الثانية

هذه الدالة التي نجري عليها التكامل قبل إجراء أي تعديل.

لأننا عند إيجاد x سوف نقوم بتكعيب الطرفين ثم نصفر مرة أخرى

$$x^3 = x \quad (\text{ليس هذه الدالة التي نكاملها})$$

$$x^3 - x = 0 \quad \leftarrow \text{لا تشبه هذه لا يجوز عليها التكامل هي فقط لإيجاد } x$$

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايصالها بالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء الملزمة مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال شرعي وقانوني (وغير مبرر الذمة) كل من يقوم بهذه الأفعال . علما ان ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحائزة هذا التاج لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون العراقي المرقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف .
لذا اقتضى التنويه والتحذير

١٢١

جد مساحة المنطقة المحصورة

مثال 13

بين المتحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

$$x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$\text{أما } x = 0$$

$$\text{أو } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$A_1 = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0$$

$$A_1 = [0] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right]$$

$$A_1 = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_0^1 (x^3 - x) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$A_2 = \left(\frac{(1)^4}{4} - \frac{(1)^2}{2} \right) - (0)$$

$$A_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$

1 د / 2017

تمهيدي / 2015

جد المساحة المحددة بالدالتين

مثال 12

$$y = x^2, y = x^4 - 12$$

$$x^4 - 12 = x^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$$

$$(x^2 + 3)(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 + 3 = 0 \text{ ليس له حل في } \mathbb{R}$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \text{ الجذور } x = \pm 2$$

$$A = \int_{-2}^2 (x^4 - x^2 - 12) dx$$



$$A = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 12x \right]_{-2}^2$$

$$A = \left[\frac{(2)^5}{5} - \frac{(2)^3}{3} - 12(2) \right] - \left[\frac{(-2)^5}{5} - \frac{(-2)^3}{3} - 12(-2) \right]$$

$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - \frac{24}{1} \right) - \left(-\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + \frac{24}{1} \right)$$

$$= \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - \frac{24}{1} + \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - \frac{24}{1}$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{48}{1} \text{ توحيد مقامات}$$

$$= \frac{192 - 80 - 720}{15} = \frac{-608}{15}$$

$$A = \left| \frac{-608}{15} \right| = \frac{608}{15} \text{ unit}^2$$

2 د / 1997

1 د / 2008

1 د / 2009

2016 / خارج القطر / د

2016 / خارج القطر / د

جد المساحة المحددة بالرقم

مثال 15

$y = \frac{1}{2}x$ وعلى الفترة $[2, 5]$ $y = \sqrt{x-1}$

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{1}{2}x - \sqrt{x-1} = 0$$

$\frac{1}{2}x = \sqrt{x-1}$ بالتربيع الدالة فترة تكاملها

$$\left[-\frac{1}{4}x^2 = x-1 \right] \cdot 4$$

2 x (1997)

$$x^2 = 4x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)(x-2) = 0$$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ ضمن حدود الفترة



$$A = \int_2^5 \left(\frac{1}{2}x - \sqrt{x-1} \right) dx$$

$$A = \int_2^5 \left[\frac{1}{4}x^2 - (x-1)^{1/2} \right] dx$$
 تعديل

$$= \left[\frac{1}{12}x^3 - \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \right]_2^5$$

$$= \left[\frac{x^3}{12} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} \right]_2^5$$

$$= \left[\frac{(5)^3}{12} - \frac{2}{3}\sqrt{(5-1)^3} \right] - \left[\frac{(2)^3}{12} - \frac{2}{3}\sqrt{(2-1)^3} \right]$$

$$= \frac{25}{4} - \frac{16}{3} - 1 + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{75-64-12+8}{12} = \frac{7}{12}$$

$$A = \left| \frac{7}{12} \right| \Rightarrow A = \frac{7}{12} (\text{unit})^2$$

جد مساحة المنطقة المحددة

مثال 14

بالدالة $y = x$ والمشتق $y = \sqrt{x}$

دالة التكامل $x = \sqrt{x} \Rightarrow x - \sqrt{x} = 0$

$x^2 = \sqrt{x}$ بالتربيع $\Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0$

$$x(x-1) = 0$$

لما $x=0$

او $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$$A = \int_0^1 (x - \sqrt{x}) dx$$



2 x (2011)

$$A = \int_0^1 (x - x^{1/2}) dx$$
 تعديل

$$A = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{3/2} \right]_0^1$$

$$A = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \right]_0^1$$

$$A = \left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1)^3} \right] - \left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{(0)^3} \right]$$

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{1} \right) - (0)$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3-4}{6} = -\frac{1}{6} \text{ unit}^2$$

$$A = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6} \text{ unit}^2$$

16

مثال

جد المساحة المحددة بالدالتين

$$x \in [0, 2\pi] \text{ حيث } g(x) = \sin x \cos x, f(x) = \sin x$$

$$g(x) = f(x)$$

$$\sin x \cos x = \sin x \Rightarrow \sin x \cos x - \sin x = 0$$

الدالة التي تكاملها

$$\sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x (\cos x - 1) = 0$$

$$\text{أما } \sin x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

$$\text{أو } \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi \end{cases}$$



$$A_1 = \int_0^{\pi} (\sin x \cos x - \sin x) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x \right]_0^{\pi}$$

$$A_1 = \left(\frac{\sin^2 \pi}{2} + \cos \pi \right) - \left(\frac{\sin^2 0}{2} + \cos 0 \right)$$

$$A_1 = (0 + (-1)) - (0 + 1)$$

$$A_1 = -1 - 1 \Rightarrow A_1 = -2$$

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (\sin x \cos x - \sin x) dx$$

$$= \left[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{\sin^2 2\pi}{2} + \cos 2\pi \right) - \left(\frac{\sin^2 \pi}{2} + \cos \pi \right)$$

$$= (0 + 1) - (0 - 1)$$

$$= 1 + 1 = 2 \Rightarrow A_2 = 2$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$= |-2| + |2| = 2 + 2 = 4 \text{ (unit)}^2$$

17 مثال

جد المساحة المحددة بالدالتين

$$g(x) = \sin x, f(x) = 2 \sin x + 1$$

$$x \in \left[0, \frac{3\pi}{2} \right] \text{ حيث}$$

$$2 \sin x + 1 = \sin x \Rightarrow 2 \sin x - \sin x + 1 = 0$$

$$\sin x + 1 = 0$$

الدالة التي تكاملها

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$



$$A_1 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1) dx$$

$$= \left[-\cos x + x \right]_0^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \left(-\cos \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) - (-\cos 0 + 0)$$

$$= \left(0 + \frac{3\pi}{2} \right) - (-1 + 0)$$

$$= \frac{3\pi}{2} + 1 \Rightarrow A = \left| \frac{3\pi}{2} + 1 \right| = \left(\frac{3\pi}{2} + 1 \right) \text{ unit}^2$$

$$A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= [\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) - \left(\sin -\frac{\pi}{2} + \cos -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$= (1+0) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$A_1 = 1 - \sqrt{2}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = |\sqrt{2} + 1| + |1 - \sqrt{2}|$$

$$A = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1$$

$$A = 2\sqrt{2} \text{ (unit)}^2$$

تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مشيئة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الأستاذ والمطبعة وفق الاتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

جد مساحة المنطقة المحددة

مثال ١٥

بالمتكافئ $g(x) = \sin x, f(x) = \cos x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\cos x = \sin x \Rightarrow \cos x - \sin x = 0$$

نقطة تقاطع

$$[\cos x = \sin x] \div \cos x \Rightarrow \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x = 1$$

$$\text{زاوية إحصاء} \quad \frac{\pi}{4} = \text{الربع الأول والثالث}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad (\text{الربع الأول}), \quad \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4} \quad (\text{الربع الثالث}), \quad \frac{5\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$A_1 = [\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$A_1 = \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - \left(\sin -\frac{\pi}{2} + \cos -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$A_1 = \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - \left(-\sin \frac{\pi}{2} + \cos -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (-1+0)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 1$$

$$A_1 = \sqrt{2} + 1$$

المسافة



$s(t) \leftarrow (s)$ الإزاحة
 $d(t) \leftarrow (d)$ المسافة
 $v(t) \leftarrow (v)$ السرعة
 $a(t) \leftarrow (a)$ التعجيل

$$d = \left| \int_{t_1}^{t_2} v(t) dx \right|$$

المسافة = تكامل السرعة

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dx$$

الإزاحة = تكامل السرعة

$$v = \int a(t) dx$$

السرعة = تكامل التعجيل



ملاحظات لحل الأسئلة - المسافة - السرعة - التسجيل

أولاً، إذا طلب في السؤال المسافة خلال الفترة $[a, b]$.

1) نساوي السرعة إلى الصفر ونجد قيم t .

2) إذا كانت $t \notin [a, b]$ نهم. أما إذا كانت $t \in [a, b]$ نجزء الفترة.



3) إذا كانت دالة السرعة غير موجودة فإنه يعطي التسجيل ونكامل لنجد دالة السرعة وبعدها نطبق الملاحظة 1 + 2.

ثانياً، إذا طلب الإزاحة (s) فإننا نكامل السرعة مباشرة. وإذا كانت دالة السرعة غير موجودة نطبق (3) لإيجاد دالة السرعة $v(t)$.

ثالثاً، إذا طلب بعد الجسم بعد () ثواني من بدء الحركة يقصد الإزاحة.

زمن من السؤال

$$s = \int_0^{\boxed{}} v(t) dx$$

رابعاً، إذا طلب المسافة أو غيرها خلال ثانية معينة مثلاً الثانية n

- قال ← جد المسافة خلال الثانية الثالثة معناها \int_0^3
- قال ← جد المسافة خلال الثانية الخامسة معناها \int_0^5
- قال ← جد المسافة خلال الثانية التاسعة معناها \int_0^9

$$\int_{n=1}^n$$

خامساً، إذا أعطى (سرعة + زمن عندها) ← نجد منها (c) ثابت التكامل.

سادساً، إذا ذكر في السؤال أن جسم يتحرك من السكون فإن $\begin{pmatrix} t=0 \\ s=0 \end{pmatrix}$ ونجد (c)

وإذا قال أن الجسم عاد إلى موضعه الأصلي (موضع انطلاقه) هذا يعني الإزاحة = صفر

سابعاً، الموضع أو بعد الجسم من بدء الحركة يعني الإزاحة (s)



ثانياً، الإزاحة المقطوعة في الفترة $[1, 3]$

$$s = \int_1^3 (2t - 4) dt$$

$$s = [t^2 - 4t]_1^3$$

$$s = [(3)^2 - 4(3)] - [(1)^2 - 4(1)]$$

$$s = (9 - 12) - (1 - 4)$$

$$= -3 - (-3) = -3 + 3 = 0m$$

ثالثاً، المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

$$d = \int_4^5 (2t - 4) dt$$

$$2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$2 \notin [4, 5]$$

$$d = [t^2 - 4t]_4^5$$

$$d = [(5)^2 - 4(5)] - [(4)^2 - 4(4)]$$

$$d = (25 - 20) - (16 - 16)$$

$$d = 5 \Rightarrow d = |5| = 5m$$

رابعاً، بُعده بعد مضي (4) ثواني من بدء حركته.

$$s = \int_0^4 (2t - 4) dt$$

$$s = [t^2 - 4t]_0^4$$

$$s = [(4)^2 - 4(4)] - [0]$$

$$s = 16 - 16 \Rightarrow s = 0m$$

جسم يتحرك على خط مستقيم

مثال 1

$$\text{بسرعة } v(t) = (2t - 4) \frac{m}{s} \text{ فجد:}$$

أولاً، المسافة المقطوعة في الفترة $[1, 3]$

$$2t - 4 = 0 \Rightarrow [2t = 4] + 2 \Rightarrow t = 2$$

$$t = 2 \in [1, 3]$$

$$\int_1^2 + \int_2^3$$

$$d_1 = \int_1^2 (2t - 4) dt$$

$$d_1 = \left[\frac{2t^2}{2} - 4t \right]_1^2 \Rightarrow d_1 = [t^2 - 4t]_1^2$$

$$d_1 = [(2)^2 - 4(2)] - [(1)^2 - 4(1)]$$

$$d_1 = (4 - 8) - (1 - 4)$$

$$d_1 = -4 - (-3) = -4 + 3 = -1$$

$$d_2 = \int_2^3 (2t - 4) dt$$

$$d_2 = [t^2 - 4t]_2^3$$

$$d_2 = [(3)^2 - 4(3)] - [(2)^2 - 4(2)]$$

$$= (9 - 12) - (4 - 8)$$

$$= -3 - (-4) = -3 + 4 = 1$$

$$d = |d_1| + |d_2|$$

$$d = |-1| + |1| = 2m$$

جسم يتحرك على خط مستقيم

مثال 3

يتسارع بسرعة 18 m/s^2 فإذا كانت سرعته قد أصبحت 82 m/s بعد مرور (4) ثواني من بدء الحركة جد:

أولاً، المسافة خلال الثانية الثالثة

$$v(t) = \int 18 \, dx$$

$$v(t) = 18t + c \rightarrow \text{السرعة}$$

• أعطى سرعة وزمن لجد (c)

$$82 = 18(4) + c \Rightarrow 82 = 72 + c \Rightarrow c = 10$$

$$v(t) = 18t + 10 \quad \text{دالة السرعة}$$

لأنه طلب مسافة نصف السرعة

$$18t + 10 = 0 \Rightarrow t = -\frac{5}{9} \quad \text{يُهمل}$$

$$d = \int_2^3 (18t + 10) \, dt$$

$$d = \left[\frac{18t^2}{2} + 10t \right]_2^3 \Rightarrow d = [9t^2 + 10t]_2^3$$

$$d = [9(3)^2 + 10(3)] - [9(2)^2 + 10(2)]$$

$$d = (81 + 30) - (36 + 20)$$

$$d = 111 - 56 = 55 \Rightarrow d = |55| = 55 \text{ (m)}$$

ثانياً، بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور

ثواني (3)

$$s = \int_0^3 (18t + 10) \, dt$$

$$s = [9t^2 + 10t]_0^3$$

$$s = [9(3)^2 + 10(3)] - [0]$$

$$s = 81 + 30 = 111 \text{ m}$$

جسم يتحرك على خط مستقيم

مثال 4

$$v(t) = (3t^2 - 6t + 3) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{سرعة}$$

المعطى:

المسافة المقطوعة في الفترة $[2, 4]$

$$[3t^2 - 6t + 3 = 0] + 3 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)(t-1) = 0 \Rightarrow t-1 = 0$$

$t = 1$ أهمل لأنه لا ينتمي للفترة $[2, 4]$

$$d = \int_2^4 (3t^2 - 6t + 3) \, dt$$

$$d = \left[\frac{3t^3}{3} - \frac{6t^2}{2} + 3t \right]_2^4$$

$$d = [t^3 - 3t^2 + 3t]_2^4$$

$$d = [(4)^3 - 3(4)^2 + 3(4)] - [(2)^3 - 3(2)^2 + 3(2)]$$

$$d = (64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)$$

$$d = 28 - 2 = 26 \Rightarrow d = |26| = 26 \text{ m}$$

ثانياً، الراحة المقطوعة في الفترة $[0, 5]$

$$s = \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3) \, dt$$

$$s = [t^3 - 3t^2 + 3t]_0^5 \quad \text{حساب كامل اعلاه}$$

$$s = [(5)^3 - 3(5)^2 + 3(5)] - [0]$$

$$s = 125 - 75 + 15 \Rightarrow s = 65 \text{ m}$$

مثال 4

جسم يتحرك على خط مستقيم

بتسريع قدره $(4t + 12) \text{ m/s}^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $(90) \text{ m/s}$ احسب: أولاً، السرعة عند

$t = 2$ التسريع التكامل السرعة

$$v(t) = \int (4t + 12) dt$$

$$v(t) = \frac{4t^2}{2} + 12t + c$$

$$v(t) = 2t^2 + 12t + c \quad t = 4, v = 90, c = ?$$

$$90 = 2(4)^2 + 12(4) + c$$

$$90 = 32 + 48 + c \Rightarrow 90 - 80 = c$$

$$c = 10$$

$$v(t) = 2t^2 + 12t + 10 \quad \text{السرعة}$$

$$v(2) = 2(2)^2 + 12(2) + 10$$

$$= 8 + 24 + 10 = 42 \text{ m/s}$$

ثانياً، المسافة خلال الفترة $[1, 2]$

$$[2t^2 + 12t + 10 = 0] \div 2$$

$$t^2 + 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t + 5)(t + 1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} t + 5 = 0 \Rightarrow t = -5 \\ t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \end{array} \right\} \text{يعمل}$$

$$d = \int_1^2 (2t^2 + 12t + 10) dt$$

$$d = \left[\frac{2t^3}{3} + \frac{12t^2}{2} + 10t \right]_1^2 \quad \text{عملية تكامل}$$

$$d = \left[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t \right]_1^2 \quad \text{اختصار}$$

$$d = \left[\frac{2(2)^3}{3} + 6(2)^2 + 10(2) \right] - \left[\frac{2(1)^3}{3} + 6(1)^2 + 10(1) \right] \quad \begin{array}{l} \text{تسوية} \\ \text{الأعلى} \end{array}$$

$$d = \left(\frac{16}{3} + 24 + 20 \right) - \left(\frac{2}{3} + 6 + 10 \right)$$

$$d = \frac{16}{3} + 44 - \frac{2}{3} - 16$$

$$d = \frac{14}{3} + 28 \Rightarrow d = \left| \frac{98}{3} \right| = \frac{98}{3} \text{ m}$$

ثالثاً، الإزاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة

$$s = \int_0^{10} (2t^2 + 12t + 10) dt$$

$$s = \left[\frac{2t^3}{3} + \frac{12t^2}{2} + 10t \right]_0^{10}$$

$$s = \left[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t \right]_0^{10}$$

$$s = \left[\frac{2(10)^3}{3} + 6(10)^2 + 10(10) \right] - [0]$$

$$s = \frac{2000}{3} + 600 + 100$$

$$s = \frac{2000 + 1800 + 300}{3} = \frac{4100}{3}$$

$$s = 1366 \frac{2}{3} \text{ m}$$

ننظر نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100t - 6t^2) \text{ m/s}$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الأول الذي بدأت منه ثم احسب التسجيل عندها.

$$v(t) = 100t - 6t^2$$

$$s = \int (100t - 6t^2) dt$$

$$s = 50t^2 - 2t^3 + c \quad \left. \begin{array}{l} s = 0 \\ t = 0 \end{array} \right\} \text{ من السكون}$$

$$s = 50(0)^2 - 2(0)^3 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore s = 50t^2 - 2t^3 \quad \text{الإزاحة}$$

عودة النقطة الى موضع الإنطلاق يعني ان الإزاحة تساوي صفر (فيزيائياً)

$$[50t^2 - 2t^3 = 0] \div 2$$

$$25t^2 - t^3 = 0$$

$$t^2 (25 - t) = 0$$

$$\text{بالبندر} \quad t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\text{أو} \quad 25 - t = 0 \Rightarrow t = 25$$

$$a(t) = 100 - 12t \quad \text{التسجيل} = (\text{مشتقة السرعة})$$

$$a(t) = 100 - 12(25)$$

$$= 100 - 300 = -200 \text{ m/s}^2$$

الحجوم الدورانية

أولاً: حساب حجم الشكل المتولد من الدورات حول محور السينات:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$\left. \begin{array}{l} x = a \\ x = b \end{array} \right\} \rightarrow \text{المستقيمين}$$

ثانياً: حساب حجم الشكل المتولد من الدورات حول محور الصادات:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$\left. \begin{array}{l} y = a \\ y = b \end{array} \right\} \rightarrow \text{المستقيمين}$$

ملاحظات

- 1 عندما يطلب في السؤال الدورات حول محور السينات نبدأ بترتيب المعادلة لنحصل على (y^2) لذلك نضع الـ y في طرف وباقي الحدود الآخر.
- 2 عندما يطلب في السؤال الدورات حول محور الصادات نبدأ بترتيب المعادلة لنحصل على (x^2) لذلك نضع الـ x في طرف وباقي الحدود الآخر.
- 3 بعد أن نحصل على (y^2) أو (x^2) نعوض بالقانون ثم نحري عملية التكامل وعلينا الإنتباه إلى حدود التكامل.
- أ إذا طلب دورات حول محور السينات وأعطى $y = a$, $y = b$ نعوض y بالدالة ونجد x من حدود التكامل في قانون الدورات حول محور السينات هي $x = b$, $x = a$ وإذا طلب دورات حول محور الصادات وأعطى $x = a$, $x = b$ نعوض ونجد y .
- ب إذا أعطى حدود مباشرة تكامل بدون تعويض.
- 4 يمكن ربط الحجوم الدورانية مع القطوع المخروطية (سنطرق لذلك).

مثال 3

أوجد الحجم الناتج من دورات المساحة المحدد بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمنحنيين $x = 1$, $x = 2$ حول المحور السيني.

الدورات حول محور السينات تحتاج y^2

$$y = x^2 \Rightarrow y^2 = x^4$$

حدود التكامل بدلالة x نستخدم القانون مباشرة

$$v = \pi \int_1^2 y^2 dx \Rightarrow v = \pi \int_1^2 x^4 dx$$

$$v = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \pi \left[\frac{(2)^5}{5} - \frac{(1)^5}{5} \right]$$

$$v = \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5} \right) \Rightarrow v = \frac{31}{5} \pi \text{ (unit)}^3$$

مثال 4

أوجد الحجم الناتج من دورات

المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمنحنيين $x = 2$, $x = 0$ حول المحور السيني.

الدورات حول محور السينات y^2 جاهزة وحدود التكامل بدلالة x

$$v = \pi \int_0^2 y^2 dx \Rightarrow v = \pi \int_0^2 x^3 dx$$

$$v = \pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2$$

$$v = \pi \left(\frac{(2)^4}{4} - \frac{(0)^4}{4} \right) \Rightarrow v = 4\pi \text{ (unit)}^3$$

مثال 4

المساحة بين المنحني $y = \sqrt{x}$ والمحور السينات دارة حول محور السينات، حدد حجمها.

الدورات حول محور السينات تحتاج y^2 حدود التكامل بدلالة x

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x$$

$$v = \pi \int_0^1 y^2 dx \text{ قانون}$$

$$v = \pi \int_0^1 x dx \text{ نعويض بالقانون}$$

$$v = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \text{ تكامل}$$

$$v = \pi \left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right] \text{ نعويض}$$

$$v = 16\pi \text{ (unit)}^3 \text{ ناتج}$$

مثال 4

أوجد الحجم الناتج من دورات

المساحة المحدد بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والمنحنيين $x = 2$, $x = 0$ حول المحور السيني.

الدورات حول محور السينات تحتاج y^2 هي جاهزة من المعطيات $y^2 = 8x$

حدود التكامل بدلالة x لذلك تكامل مباشرة

$$v = \pi \int_0^2 y^2 dx \Rightarrow v = \pi \int_0^2 8x dx$$

$$v = \pi \left[\frac{8x^2}{2} \right]_0^2 \Rightarrow v = \pi [4x^2]$$

$$v = \pi [4(2)^2 - 4(0)^2]$$

$$v = \pi (16) \Rightarrow v = 16\pi \text{ (unit)}^3$$



أوجد الحجم الناشئ من دورات

مثال 7

المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $1 \leq y \leq 3$, $y = \frac{3}{x}$ حول المحور الصادي

$$y = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{y} \Rightarrow x^2 = \frac{9}{y^2}$$

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy \quad \text{القانون}$$

$$v = \pi \int_1^3 (9y^{-2}) dy \quad \text{التعويض}$$

$$= \pi \left[\frac{9y^{-1}}{-1} \right]_1^3 \quad \text{التكامل}$$

$$= \pi \left[\frac{-9}{y} \right]_1^3 \quad \text{تعويض بحدود التكامل}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{-9}{3} \right) - \left(\frac{-9}{1} \right) \right]$$

$$= \pi (-3 + 9) = 6\pi \text{ unit}^3$$

أوجد الحجم الناتج من دورات

مثال 5

المساحة المحدد بالقطع المكافئ $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 5$ حول المحور x .

$$y = 2x^2 \Rightarrow y^2 = 4x^4$$

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx \Rightarrow v = \pi \int_0^5 4x^4 dx$$

$$v = \pi \left[\frac{4x^5}{5} \right]_0^5$$

$$v = \pi \left[\frac{4(5)^5}{5} - \frac{4(0)^5}{5} \right]$$

$$v = \pi \left(\frac{12500}{5} \right) \Rightarrow v = 2500\pi \text{ (unit)}^3$$

أوجد الحجم الناتج من دورات

مثال 6

المساحة المحدد بالقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 0$, $y = 16$ حول المحور y .

الدورات حول محور الصادات نحتاج x^2

$$[y = 4x^2] \div 4 \Rightarrow x^2 = \frac{y}{4}$$

حدود التكامل بدلالة y نستخدم القانون مباشرة

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy \Rightarrow v = \pi \int_0^{16} \left(\frac{y}{4} \right) dy$$

$$v = \pi \left[\frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{4} \right]_0^{16} \Rightarrow v = \pi \left[\frac{y^2}{8} \right]_0^{16}$$

$$v = \pi \left[\frac{(16)^2}{8} - \frac{(0)^2}{8} \right] \Rightarrow v = 32\pi \text{ (unit)}^3$$



أحسب الحجم المتولد من دورات

مثال 10

المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 + x = 1$ والمنحني $y = 4$ حول المحور الصادي.

نعوض $x = 0$ لنجد y

$$y^2 + 0 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

بالتربيع $y + x = 1 \Rightarrow x = 1 - y^2$

$$x^2 = (1 - y^2)^2$$

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$v = \pi \int_{-1}^1 (1 - y^2)^2 dy$$

نفتح التربيع لعدم توفر مشتقة داخل القوس

$$v = \pi \int_{-1}^1 (1 - 2y^2 + y^4) dy$$

$$v = \pi \left[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1$$

$$v = \pi \left[\left(1 - \frac{2(1)^3}{3} + \frac{(1)^5}{5} \right) - \left((-1) - \frac{2(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^5}{5} \right) \right]$$

$$v = \pi \left[\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) \right]$$

$$v = \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right)$$

$$v = \frac{15 - 10 + 3 + 15 - 10 + 3}{15}$$

$$v = \frac{16}{15} \text{ unit}^3$$

أوجد الحجم الناتج من دورات

مثال 8

المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^2 + 1$ والمنحني $y = 4$ حول المحور الصادي.

أعطى $y = 4$ نحتاج قيمة أخرى لـ y نعوض $x = 0$

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow y = (0)^2 + 1 \Rightarrow y = 1$$

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1 \quad \begin{matrix} y=4 \\ y=1 \end{matrix}$$

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$v = \pi \int_1^4 (y - 1) dy$$

$$v = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y \right]_1^4$$

$$v = \pi \left[\left(\frac{4^2}{2} - 4 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) \right]$$

$$v = \pi \left[4 - \frac{1}{2} + 1 \right] = \frac{9}{2} \pi \text{ (unit)}^3$$

المنطقة المحددة بين المنحني

مثال 9

المنطقة المحددة بين المنحني $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ ودورات $1 \leq y \leq 4$ حول محور الصادات

$$x = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{y}$$

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$v = \pi \int_1^4 \frac{1}{y} dy$$

$$v = \pi [\ln y]_1^4$$

$$v = \pi [\ln 4 - \ln 1]$$

$$v = \pi \ln 2^2$$

$$v = 2\pi \ln 2 \text{ unit}^3$$

الأسنان حيدر وليد

المُسْنَد فِي الرِّيَاضِيَّاتِ



2021

5

المعادلات التفاضلية

الفصل الخامس

الأحيائي و التطبيقي

07702729223



ملازم دار المغرب

المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

Nots:



المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ



07702729223



ملازمہ دار الفرب

هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة أو أكثر للدالة المجهولة في المعادلة.
هي رتبة أعلى مشتقة.

هي أكبر أس مرفوع له أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية.

المعادلة التفاضلية

المرتبة (الرتبة)

الدرجة

الدرجة	الرتبة	المعادلة التفاضلية
الأولى	الأولى	1 $\frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$
الأولى	الثانية	2 $\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3xy + 7$
الثالثة	الثالثة	3 $(\ddot{y})^3 + \ddot{y} - y = 0$
الأولى	الثانية	4 $\ddot{y} + 2y (\dot{y})^2 = 0$
الرابعة	الأولى	5 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = x^2 - 5$
الأولى	الرابعة	6 $y^{(4)} + \cos y + x^2 y \ddot{y} = 0$
الثانية	الثالثة	7 $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = 0$
الثالثة	الثالثة	8 $(\ddot{y})^3 - 2\ddot{y} + 8y = x^3 + \cos x$
الأولى	الأولى	9 $(x^2 - y^2) + 3xy \frac{dy}{dx} = 0$
الأولى	الثانية	10 $\frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 5y = 7$
الثانية	الثالثة	11 $x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2 \frac{d^2y}{dx^2} 3y = 0$

سؤال ما رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية التالية: $(\bar{y})^2 = \sqrt{1 + (\bar{y})^2}$

بالتربيع $\Rightarrow (\bar{y})^2 = \sqrt{1 + (\bar{y})^2}$ نتخلص من الجذر بالتربيع $(\bar{y})^4 = 1 + (\bar{y})^2$

الرتبة \leftarrow الثانية الدرجة \leftarrow الرابعة

سؤال كيف أعرف درجة ورتبة المعادلة التفاضلية؟

الحل ننظر إلى أعلى مشتقة / أعلى مشتقة تمثل الرتبة ثم نأخذ أس أعلى مشتقة فهو يمثل الدرجة.

مثال $x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)^2 + 2 \frac{d^2y}{dx^2}$

أعلى مشتقة هي الثالثة $\frac{d^3y}{dx^3}$ أي رتبة ثلاثة

وننظر إلى أس هذه مشتقة وهو $\left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)^2$ أي الدرجة الثانية.

مثال $\bar{y} = (\bar{y})^5 - 1$

أعلى مشتقة \bar{y} رتبة ثانية

أس هذه المشتقة وهو $(1) \leftarrow (\bar{y})$ (درجة أولى).

سؤال 4 برهن ان $y = 3 \cos 2x + 2 \sin 2x$

هو حلًا للمعادلة التفاضلية $\ddot{y} + 4y = 0$

$$y = 3 \cos 2x + 2 \sin 2x$$

$$\ddot{y} = 3(-\sin 2x)(2) + 2(\cos 2x)(2)$$

$$\ddot{y} = -6 \sin 2x + 4 \cos 2x$$

$$\ddot{y} = -6(\cos 2x)(2) + 4(-\sin 2x)(2)$$

$$\ddot{y} = -12 \cos 2x - 8 \sin 2x$$

$$\ddot{y} + 4y = 0$$

$$(-12 \cos 2x - 8 \sin 2x) + 4(3 \cos 2x + 2 \sin 2x) = 0$$

$$-12 \cos 2x - 8 \sin 2x + 12 \cos 2x + 8 \sin 2x = 0$$

$$0 = 0$$

$$RHS = LHS$$

وعليه تكون $y = 3 \cos 2x + 2 \sin 2x$ حلًا للمعادلة التفاضلية.

حل $y = x^3 + x - 2$ حلًا للمعادلة

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 6x$$

$$y = x^3 + x - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 6x$$

وعليه تكون $y = x^3 + x - 2$ حلًا للمعادلة التفاضلية.

حل $y = x + 2$ حلًا للمعادلة

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + y = x$$

$$y = x + 2$$

$$\ddot{y} = 0$$

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + y = x$$

$$0 + 3(1) + x + 2 = x$$

$$3 + x + 2 = x$$

$$5 + x \neq x$$

$$RHS \neq LHS$$

وعليه تكون العلاقة $y = x + 2$ ليست حلًا للمعادلة التفاضلية.

برهن ان $y = \sin x$ حلًا للمعادلة

$$\ddot{y} + y = 0$$

$$y = \sin x \Rightarrow \ddot{y} = -\sin x$$

$$\ddot{y} + y = 0$$

$$-\sin x + \sin x = 0$$

$$0 = 0$$

$$RHS = LHS$$

وعليه تكون $y = \sin x$ حلًا للمعادلة التفاضلية $\ddot{y} + y = 0$.



سؤال 5 برهن ان $s = 8 \cos 3t + 6 \sin 3t$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$

المعادلة الأصلية

$$s = 8 \cos 3t + 6 \sin 3t$$

$$\frac{ds}{dt} = 8 (-\sin 3t)(3) + 6 (\cos 3t)(3)$$

$$\frac{ds}{dt} = -24 \sin 3t + 18 \cos 3t$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -24 (\cos 3t)(3) + 18 (-\sin 3t)(3)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -72 \cos 3t - 54 \sin 3t$$

المشتقة الثانية

(نعوض بمعادلة السؤال الأصلية) $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$

$$-72 \cos 3t - 54 \sin 3t + 9 (8 \cos 3t + 6 \sin 3t) = 0$$

$$-72 \cos 3t - 54 \sin 3t + 72 \cos 3t + 54 \sin 3t = 0$$

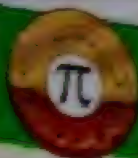
$$0 = 0$$

$$R.H.S = L.H.S$$

وعليه تكون العلاقة $s = 8 \cos 3t + 6 \sin 3t$ حلاً للمعادلة التفاضلية .

لحل المعادلة
 $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$
 نحتاج المشتقة الثانية
 والعلاقة الأصلية





حل ان $y = \tan x$ حلاً للمعادلة $\bar{y} = 2y(1+y^2)$

$$y = \tan x \Rightarrow \bar{y} = \sec^2 x \Rightarrow \bar{y} = (\sec x)^2$$

$$\bar{y} = 2(\sec x)^2 \sec x \tan x$$

$$\bar{y} = 2\sec^2 x \tan x$$

$$\bar{y} = 2y(1+y^2) \text{ (نعوض بمعادلة السؤال الأصلية)}$$

$$2\sec^2 x \tan x = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$2\sec^2 x \tan x = 2 \tan x \sec^2 x$$

$$RHS = LHS$$

وعليه تكون العلاقة $y = \tan x$ حلاً للمعادلة التفاضلية.

نعامل
معادلة القوس المرفوع الى
الأس حسب المثلثاؤها

قانون $\sec^2 x$

بين ان $y = ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\bar{y} + y = 0$ حيث $a \in \mathbb{R}$

$$y = ae^{-x} \Rightarrow \bar{y} = a(-1)e^{-x}$$

$$\bar{y} = -ae^{-x}$$

نعوض بمعادلة السؤال (المعادلة التفاضلية)

$$\bar{y} + y = 0$$

$$-ae^{-x} + ae^{-x} = 0$$

$$0 = 0$$

$$RHS = LHS$$

وعليه تكون العلاقة $y = -ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية.

بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\bar{y} + \bar{y} - 6y = 0$

$$y = e^{2x} + e^{-3x} \Rightarrow \bar{y} = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$$

$$\bar{\bar{y}} = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$

$$\bar{\bar{y}} + \bar{y} - 6y = 0$$

$$4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6(e^{2x} + e^{-3x}) = 0$$

$$6e^{2x} + 6e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x} = 0$$

$$0 = 0$$

$$RHS = LHS$$

وعليه تكون العلاقة $y = e^{2x} + e^{-3x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}} + \bar{y} - 6y = 0$



إذا كانت العلاقة اشتقاقية، فإنها هي العالمية لا تحتاج التصريح في البساطة التفاضلية. وأما كل الشغل في العلاقة حيث نشترك العلاقة ثم نقاربت النتائج بالمعادلة التفاضلية.

ملاحظة

كيف أعرف أن العلاقة ضمنية؟

سؤال

عندما لا تكون بدالة $y = \square \mp \square$ حدود تحوي x فقط. حدود تحوي x فقط.

جواب

$$y = x^3 - x + 2$$

$$y = x^2 + 5$$

$$y = \tan x$$



ليست ضمنية لأنها بدالة y فقط

$$y^2 = 3x^2 + 5$$

$$\ln |y| = 5x + e^x$$

$$y^3 = 5x + y$$

$$\sin xy = 5x + 1$$



ضمنية

توضيح

عندما تكون (y) وحدها بدون تجميع وتكعيب أو شيء، آخر نقول ليست ضمنية أما $e^y, \ln y, y^3, y^2$ فإنها ضمنية حتى إن كانت وحدها بطرف.

قبل أن تسول نفسك بشروير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دارالمغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي أو إيصالها بالموبايل أو أجهزة نقل الملفات إلى أصحاب المكتبات وسحبها أو شراء القرص مسنونة وبيعها أو عن أي طريق يؤدي إلى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل أو غيره لكون فيها أشكال شرعي وقانوني (وغير مبرر الذمة) كل من يقوم بهذه الأفعال. علما أن ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحائزة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتؤكد وأحذر أن هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لأن ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصلة على شهادة تسجيل وأن عقوبة ذلك موجودة في القانون العربي المرقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة التجهيزات الخاصة وأحالتها إلى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات أخرى بحق المخالف. لذا اقتضى التنويه والتحذير.

تحذير هام جدا



حل 9
فل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلًا للمعادلة التفاضلية $y\bar{y} + (\bar{y})^2 - 3x = 5$
(العلاقة ضمنية) $y^2 = 3x^2 + x^3$

$$2y\bar{y} = 6x + 3x^2$$

$$[2(y\bar{y} + \bar{y}\bar{y}) = 6 + 6x] \div 2 \Rightarrow y\bar{y} + (\bar{y})^2 = 3 + 3x$$

$$y\bar{y} + (\bar{y})^2 - 3x = 3$$

$$y\bar{y} + (\bar{y})^2 - 3x = 3 \neq 5$$

ليست حلًا للمعادلة التفاضلية.

حل 10
بين أن $a \in \mathbb{R}$ ، $\text{Lny}^2 = x + a$ حلًا للمعادلة التفاضلية $2\bar{y} - y = 0$

$$\text{Lny}^2 = x + a \Rightarrow 2\text{Lny} = x + a$$

$$\left[2 \cdot \frac{\bar{y}}{y} = 1\right] \cdot y$$

$$2\bar{y} = y \Rightarrow 2\bar{y} - y = 0$$

$$\left[\frac{2\bar{y}}{y} = 1\right] \cdot y$$

$$2\bar{y} = y \Rightarrow 2\bar{y} - y = 0$$

$2\bar{y} - y = 0$ حلًا للمعادلة التفاضلية $\text{Lny}^2 = x + a$.

حل 11
بين أن $c \in \mathbb{R}$ ، $\text{Ln}|y| = x^2 + c$ حلًا للمعادلة التفاضلية $\bar{y} = 4x^2y + 2y$

العلاقة ضمنية $\text{Ln}|y| = x^2 + c \rightarrow$

$$\frac{\bar{y}}{y} = 2x \Rightarrow \left[\frac{\bar{y}}{y} = 2x\right] \cdot y \Rightarrow \bar{y} = 2xy$$

$$\bar{y} = 2(x\bar{y} + y \cdot (1))$$

$$\bar{y} = 2x\bar{y} + 2y$$

فنخلص من \bar{y} لأن معادلة
الفرق خالية من \bar{y}

$$\bar{y} = 2x(2x\bar{y} + 2y)$$

$\bar{y} = 4x^2y + 2y$. حلًا للمعادلة التفاضلية.

سؤال 12/14 هل $yx = \sin 5x$ حلاً للمعادلة

التفاضلية $x\bar{y} + 2\bar{y} + 25xy = 0$

المتناقض ضمني

حاصل ضرب دالتين

$$y(1) + x(\bar{y}) = 5 \cos 5x$$

نشتق العلاقة المتناقض لثاني

$$y + x\bar{y} = 5 \cos 5x$$

$$\bar{y} + x\bar{\bar{y}} + \bar{y}(1) = -5 \sin 5x \quad (5)$$

$$2\bar{y} + x\bar{\bar{y}} = -25 \sin 5x$$

$$x\bar{\bar{y}} + 2\bar{y} + 25 \sin 5x = 0$$

$$x\bar{\bar{y}} + 2\bar{y} + 25xy = 0 \quad \text{من السؤال}$$

عليه تكون العلاقة $yx = \sin 5x$ حلاً للمعادلة

سؤال 15 هل $2x^2 + y^2 = 1$ حلاً للمعادلة

$$y^3\bar{y} = -2$$

$$2x^2 + y^2 = 1$$

$$[4x + 2y\bar{y} = 0] + 2 \Rightarrow 2x + y\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{-2x}{y} \quad \dots (1)$$

$$\bar{\bar{y}} = \frac{(y)(-2) - (-2x)(\bar{y})}{y^2} \Rightarrow \left[\bar{\bar{y}} = \frac{-2y + 2xy}{y^2} \right] \cdot y^2$$

$$y^3\bar{\bar{y}} = -2y + 2xy \quad \text{تعويض}$$

$$[y^3\bar{\bar{y}} = -2y + 2x \cdot \frac{-2x}{y}] \cdot y \Rightarrow y^3\bar{\bar{y}} = -2y^2 - 4x^2$$

$$y^3\bar{\bar{y}} = -2(y^2 + 2x^2)$$

علاقة السؤال = 1

$$y^3\bar{\bar{y}} = -2$$

عليه تكون $y^3\bar{\bar{y}} = -2$ حلاً للمعادلة التفاضلية

سؤال 12/14 بين أن العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلاً

للمعادلة التفاضلية $x\bar{y} = x^2 + y$

$$y = x^2 + 3x \Rightarrow \bar{y} = 2x + 3$$

(معادلة السؤال الأصلية)

$$x(2x + 3) = x^2 + \frac{x^2 + 3x}{y}$$

$$2x^2 + 3x = 2x^2 + 3x$$

$$R.H.S = L.H.S$$

عليه تكون العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلاً للمعادلة

سؤال 13 اثبت أن $y = x \ln |x| - x$ أحد

حلول للمعادلة $\frac{xdy}{dx} = x + y$

$$y = x \ln |x| - x$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[x \cdot \frac{1}{x} + \ln |x| (1) \right] - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \ln |x| - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln |x|$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = x + y \quad \text{الأصلية}$$

$$x \cdot \ln |x| = x + x \ln |x| - x$$

$$x \ln |x| = x \ln |x|$$

$$R.H.S = L.H.S$$

عليه تكون $y = x \ln |x| - x$ حلاً للمعادلة التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية

طريقة فصل المتغيرات

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx + c$$

بعض ملاحظات

1. ان وجدنا \bar{y} بالمعادلة في السؤال نعوض بدلاً لها $\frac{dy}{dx}$.
2. نضرب طرفي المعادلة بـ dx ان وجدناها بالبقاء.
3. عند عزل المتغيرات نقسم على العنصر غير المرغوب به.

مثلاً:

1 $[2x dy = 3 dx] \div x$ غير مرغوب به

← غير مرغوب به لأنه x في طرف dy لم تكمل الحل $2 dy = \frac{3}{x} dx$ →

2 $[\sin x dy = \cos x dx] \div \sin x$

← غير مرغوب به لأنه x في طرف dy لم تكمل الحل $dy = \frac{\cos x}{\sin x} dx$ →

3 $[3y dx = 5 dy] \div y$

← غير مرغوب به لأنه y في طرف dx لم تكمل الحل $3 dx = \frac{5}{y} dy$ →

سؤال 3 حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات.

$$(y^2 + 4y - 1) \bar{y} = x^2 - 2x + 3$$

$$\left[(y^2 + 4y - 1) \frac{dy}{dx} = (x^2 - 2x + 3) \right] \cdot dx$$

نضرب بـ dx سوف تنفصل المتغيرات

$$\int (y^2 + 4y - 1) dy = \int (x^2 - 2x + 3) dx$$

$$\frac{y^3}{3} + \frac{4y^2}{2} - y = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x + c$$

$$\left[\frac{y^3}{3} + 2y^2 - y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + c \right] \cdot 3$$

$$y^3 + 6y^2 - 3y = x^3 - 3x^2 + 9x + c_1$$

سؤال 4 حل المعادلة $y\bar{y} = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

$$\left[y \frac{dy}{dx} = 4 \cdot (1+y^2)^{\frac{3}{2}} \right] \cdot dx$$

نتخلص من الجذر

$$y dy = 4 (1+y^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

غير مرغوب فيه
نقسم عليه لأنه y في طرف dx

$$\frac{y dy}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4 (1+y^2)^{\frac{3}{2}} dx}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int y (1+y^2)^{-\frac{3}{2}} dy = \int 4 dx$$

تكامل فووس

$$\frac{1}{2} \int 2y (1+y^2)^{-\frac{3}{2}} dy = \int 4 dx$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{1} (1+y)^{-\frac{1}{2}} = 4x + c$$

سؤال 1 حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$

$$\left[\frac{dy}{dx} = 2x + 5 \right] \cdot dx$$

نضرب بـ

$$dy = (2x + 5) dx$$

ثم نعمل المتغيرات

$$\int dy = \int (2x + 5) dx$$

تكامل الطرفين

$$y = \frac{2x^2}{2} + 5x + c \Rightarrow y = x^2 + 5x + c$$

سؤال 2 حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

ضرب الطرفين \times الوسطين سوف يحل مشكلة السؤال وتنفصل المتغيرات.

$$y dy = (x - 1) dx$$

تكامل الطرفين

$$\int y dy = \int (x - 1) dx$$

$$\left[\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - x + c \right] \cdot 2$$

$$y^2 = x^2 - 2x + 2c$$

بالجذر التربيعي

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + c_1}$$

سؤال 6 حل المعادلة التفاضلية $\bar{y} = 2e^x y^3$

بطريقة فصل المتغيرات عندما $x=0, y=\frac{1}{2}$

$$\left[\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3 \right] \cdot dx$$

$$[dy = 2e^x y^3 dx] + y^3 \text{ غير مرغوب فيه}$$

$$\frac{dy}{y^3} = \frac{2e^x y^3 dx}{y^3}$$

$$\int y^{-3} dy = 2 \int e^x dx \text{ تكامل الطرفين}$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = 2e^x + c$$

$$\frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c$$

$$\frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c \quad x=0, y=\frac{1}{2} \text{ نعوض}$$

$$\frac{-1}{2(\frac{1}{2})^2} = 2e^0 + c$$

$$\frac{-1}{2(\frac{1}{4})} = 2 + c \Rightarrow \frac{-1}{\frac{1}{2}} = 2 + c$$

$$-2 - 2 = c$$

$$c = -4$$

$$\left[\frac{-1}{2y^2} = 2e^x - 4 \right] \cdot -2$$

$$\frac{1}{y^2} = -4e^x + 8 \Rightarrow \frac{1}{-4e^x + 8} = y^2$$

$$y^2 = \frac{1}{8 - 4e^x} \text{ بالجذر التربيعي}$$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{8 - 4e^x}}$$

$$\frac{-1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 4x + c$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x + c$$

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{-1}{4x+c}$$

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x=2, y=9 \text{ عندما } \bar{y} - x\sqrt{y} = 0$$

$$\bar{y} - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = x\sqrt{y}$$

$$\left[\frac{dy}{dx} = x \cdot y^{\frac{1}{2}} \right] dx$$

$$dy = x \cdot y^{\frac{1}{2}} dx$$

غير مرغوب فيه
نقسم عليه

$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{x y^{\frac{1}{2}} dx}{y^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int x dx$$

$$\frac{2}{1} y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\left[2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + c \right] + 2$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + \left(\frac{c}{2} \right) = c_1 \text{ بالتربيع}$$

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + c_1 \right)^2$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 9

$$e^{x+2y} + \bar{y} = 0$$

$$e^{x+2y} + \bar{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -e^{x+2y}$$

$$\left[\frac{dy}{dx} = -e^x e^{2y} \right] dx \Rightarrow dy = -e^x e^{2y} dx$$

(عبر مرعوب فيه)

$$\frac{dy}{e^{2y}} = \frac{-e^x e^{2y} dx}{e^{2y}}$$

$$\int e^{-2y} dy = -\int e^x dx$$

نوفر مشتقة الأس

$$\frac{-1}{2} \int -2e^{-2y} dy = -\int e^x dx$$

$$\frac{-1}{2} e^{-2y} = -e^x + c$$

$$\frac{-1}{2e^{2y}} = -e^x + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 10

$$y \neq (2n+1) \frac{\pi}{2} \text{ حيث } dy = \sin x \cos^2 y \, dx$$

$$[dy = \sin x \cos^2 dx] + \cos^2 y$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x \, dx \quad \text{تكامل الطرفين}$$

$$\int \sec^2 y \, dy = \int \sin x \, dx$$

$$\tan y = -\cos x + c$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+2y} \quad \text{حل المعادلة}$$

سؤال 7

$$x=0, y=0 \text{ عندما}$$

$$\left[\frac{dy}{dx} = e^{x+2y} \right] dx \Rightarrow dy = e^{x+2y} dx$$

$$e^{-2y} dy = e^x dx$$

$$-\int e^{-2y} dy = \frac{1}{2} \int 2e^{2y} dx$$

$$-e^{-2y} = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

نعويض

$$-e^0 = \frac{1}{2} e^0 + c$$

$$-1 = \frac{1}{2} + c \quad c = \frac{3}{2}$$

$$-e^{-2y} = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-1}{e^y} = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\left[\frac{-1}{e^y} = \frac{e^{2x}-3}{2} \right] \times (-1)$$

$$\frac{1}{e^y} = \frac{3-e^{2x}}{2}$$

يمكن التوقف هنا

$$e^y = \frac{2}{3-e^{2x}}$$

Ln للطرفين

$$y = \ln \left| \frac{2}{3-e^{2x}} \right|$$

$$e^x dx - y^3 dy = 0 \quad \text{حل المعادلة}$$

سؤال 8

$$\int e^x dx = \int y^3 dy \quad \text{نحول y للطرف الأيمن}$$

نحذف المتغيرات

$$\int y^3 dy = \int e^x dx$$

$$\left[\frac{y^4}{4} = e^x + c \right] \times (-4)$$

$$y^4 = 4e^x + 4c \quad \text{بالجذر الرابع}$$

$$y = \sqrt[4]{4e^x + c_1}$$

حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات

سؤال 13

$$y \cos^3 x = \sin x$$

$$\left[\frac{dy}{dx} \cos^3 x = \sin x \right] \cdot dx$$

$$\frac{dy \cos^3 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$\int dy = \int \sin x \cdot (\cos x)^{-3} dx$$

مشتقة الـ $\cos \Leftarrow -\sin$ نحتاج (-1)

$$\int dy = - \int -\sin x (\cos x)^{-3}$$

$$y = -\frac{\cos^{-2} x}{-2} + c$$

$$y = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c$$

يمكن التوقف إلى هنا

$$y = \frac{1}{2} \sec^2 x + c$$

أوجد حل المعادلة التفاضلية

سؤال 11

$$x \cos^2 y dx + \tan y dy = 0$$

$$\frac{\tan y dy}{\cos^2 y} = \frac{-x \cos^2 y dx}{\cos^2 y}$$

$$\int \frac{1 \tan y}{\cos^2 y} dy = \int -x dx$$

$$\int \sec^2 y \cdot \tan y dy = \int -x dx$$

$$\left[\frac{\tan^2 y}{2} = \frac{-x^2}{2} + c \right] \cdot 2 \Rightarrow \tan^2 y = -x^2 + c$$

للسؤال طريقة أخرى لكن نكتفي بهذه الطريقة فهي الأسهل.

أوجد حل المعادلة التفاضلية

سؤال 12

$$\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$$

$$\left[\sin x \cos y \frac{dy}{dx} = -\cos x \sin y \right] \cdot dx$$

$$\sin x \cos y dy = -\cos x \sin y dx$$

غير مرغوب

غير مرغوب

نقسم على $\sin y \cdot \sin x$ لأنها غير مرغوب

$$\frac{\sin x \cos y dy}{\sin y \sin x} = \frac{-\cos x \sin y}{\sin y \sin x} dx$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = - \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\ln |\sin y| = -\ln |\sin x| + c$$

قد يعال الطالب لماذا لم يعوض بـ $\frac{\cos}{\sin}$ بقانون cot

جواب: لو اعتبرنا $\frac{\cos}{\sin}$ بـ cot يتوقف الحل لعدم

وجود تكامل مباشر لها في الجدول

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

سؤال 16

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$$

* نضرب بـ dx ثم نقسم على العنصر غير مرغوب فيه

$$[dy = (x+1)(y-1) dx] \div (y-1)$$

نقسم على $(y-1)$ لأنه y في طرف

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int (x+1) dx$$

$$\ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + x + c$$

ياخذ (e) للطرفين

$$y-1 = e^{\frac{x^2}{2} + x + c}$$

يمكن التوقف هنا

$$\therefore y = e^{\frac{x^2}{2} + x + c} + 1$$

حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات.

سؤال 17

$$(x+1) \frac{dy}{dx} = 2y$$

نضرب بـ dx

$$[(x+1) dy = 2y dx] \div (x+1) \cdot y$$

غير مرغوب فيه

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1} dx$$

نكامل الطرفين

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|y| = 2 \cdot \ln|x+1| + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 14

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$$

مجرد ضرب طرفي التناصب لنفصل المتغيرات

$$\int (3y^2 + e^y) dy = \int \cos x dx$$

$$\frac{\cancel{y}^3}{\cancel{3}} + e^y = \sin x + c$$

$$y^3 + e^y = \sin x + c$$

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

سؤال 15

$$\tan^2 y dy = \sin^3 x dx$$

* لاحظ ان متغيرات المعادلة منفصلة مباشرة فجري عملية التكامل فقط عليك مراجعة تكامل $\sin^3 x$ و $\tan^2 x$ في التكامل فهذا السؤال عبارة عن تكامل مباشر.

$$\int (\sec^2 y - 1) dy = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1) dy = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx$$

$$\int \sec^2 y dy - \int dy = \int \sin x dx - \int \sin x \cos^2 x dx$$

الآن تكامل مباشرة

$$\tan y - y = \cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

$$\int -\sin x \cos^2 x dx$$

* ربما يتساءل عن تكامل الحد الأخير فوس مرفوع الى اس $(\cos x)^2 \rightarrow$

مشتقة داخل قوس $-\sin x \rightarrow$

نعمل مع (-) لأن الإشارة (-) داخل مع الأفعال فاصبحت بعد التكامل (+).

حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات .

سؤال 19

$$xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$$

$$xy \frac{dy}{dx} = 1 - y^2 - y^2$$

$$\left[xy \frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2 \right] dx$$

$$xy dy = (1 - 2y^2) dx$$

غير مرغوب فيه → غير مرغوب فيه →
نقسم الطرفين $(1 - 2y^2)$ و x لأنها عناصر ليست في طرفها المناسب .

$$\frac{\cancel{x} y dy}{\cancel{x} (1 - 2y^2)} = \frac{(1 - 2y^2)}{x (1 - 2y^2)} dx$$

$$\frac{1}{-4} \int \frac{-4y dy}{1 - 2y^2} = \int \frac{dx}{x}$$

مشتقة المقام $(-4y)$

$$\frac{1}{-4} \ln |1 - 2y^2| = \ln |x| + c$$

حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات .

18

$$\frac{dy}{dx} + xy = 3x \quad x=1, y=2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x - xy$$

$$\left[\frac{dy}{dx} = x(3 - y) \right] dx$$

$$[dy = x(3 - y) dx] + 3 - y$$

نقسم على $(3 - y)$
لنأخذ طرف dx

$$\int \frac{dy}{3 - y} = \int x dx$$

مشتقة $3 - y$ هي (-1) نحتاج (-1)

$$-\int \frac{dy}{3 - y} = \int x dx$$

$$-\ln |3 - y| = \frac{x^2}{2} + c$$

$$-\ln (3 - 2) = \frac{(1)^2}{2} + c$$

$$-\ln (1) = \frac{1}{2} + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

يمكن التوقف هنا

$$\left[-\ln |3 - y| = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right] \cdot (-1)$$

$$\ln |3 - y| = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$3 - y = e^{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = 3 - e^{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}}$$

تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الأنترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما يتفق التبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

المعادلة التفاضلية المتجانسة

سؤال

كيف يمكن تحديد المعادلة التفاضلية المتجانسة عن طريقة فصل المتغيرات؟

1 كل معادلة تفاضلية تحوي دالة مثلثية فيها الزاوية بشكل $\left(\frac{y}{x}\right)$ فهي معادلة تفاضلية متجانسة وإذا لم تكن الزاوية $\left(\frac{y}{x}\right)$ فيتم حلها بفصل المتغيرات (الطريقة السابقة).

2 كل معادلة تفاضلية تحوي دالة e والأس بشكل $\left(\frac{y}{x}\right)$ فهي معادلة تفاضلية متجانسة وإذا لم يكن الأس بشكل $\frac{y}{x}$ فيتم حلها بفصل المتغيرات (الطريقة السابقة).

3 إذا كانت أعلى أس لـ X يساوي أعلى أس لـ Y وكانت مجموع أسس حاصل ضرب $Y \cdot X$ يساوي أعلى أس لـ X و Y فهذه المعادلة متجانسة.

4 المعادلات التفاضلية التي شكلها $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}$ هذه معادلات تفاضلية متجانسة.

خطوات الحل

1 يجب جعل المعادلة بترتيب تكون فيه $\frac{dy}{dx}$ بالطرف الأيسر وباقي تفاصيل المعادلة بالطرف الأيمن (أحياناً يعطيها مرتبة).

2 نقسم كل حد من حدود الطرف الأيمن على أكبر أس لـ X (مرفوعة إلى أكبر أس).

3 الفرضية $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot v$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

4 نعوض هذه الفرضية بالمعادلة التفاضلية.

5 يتم استخدام خاصية قلب النسب لفصل المتغيرات والعودة للطريقة القديمة.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

سؤال 2 حل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

نقسم على التمراسل X

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \dots (1)$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$$

الفرضية

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

نعوض الفرضية

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{3v^2 - 1}{2v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} - v$$

توحيد مقامات

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1 - 2v^2}{2v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

قلب النسب والضرب ب dv

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2v}{v^2 - 1} dv$$

$$\ln|x| = \ln|v^2 - 1| + c$$

$$\ln|x| = \ln\left|\frac{y^2}{x^2} - 1\right| + c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

سؤال 1 حل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \dots (1)$$

الفرضية (قابلة)

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

التعويض

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{1 + v^2}{2v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v} - v$$

توحيد مقامات

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2 - 2v^2}{2v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{2v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2v}{1 - v^2} dv$$

خاصية قلب النسب والضرب ب dv

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \frac{-2v}{1 - v^2} dv$$

لوفر مشتقة
-2v

$$\ln|x| = -\ln|1 - v^2| + c$$

$$\ln|x| = -\ln\left|1 - \frac{y^2}{x^2}\right| + c$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{2}{v^2 - 2v + 1} dv$$

مربع كامل

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2}{(v-1)^2} dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = 2 \int (v-1)^{-2} dv$$

$$\ln|x| = \frac{2(v-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$\ln|x| = \frac{-2}{v-1} + c$$

$$\ln|x| = \frac{-2}{\frac{y}{x} - 1} + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 3

$$2x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

$$\left[2x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \right] \div 2x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2} \dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = v.x$$

نعوض الفرضية

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{1 + v^2}{2}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2} - \frac{v}{1} \quad \text{توحيد مقامات}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2 - 2v}{2}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-v^4}{1+v^3}$$

قلبت النسبة والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{1+v^3}{-v^4} dv$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{-v^4} + \frac{v^3}{-v^4} \right) dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \left(-v^{-4} - \frac{1}{v} \right) dv$$

$$\ln|x| = \frac{-v^{-3}}{-3} - \ln|v| + c$$

$$\ln|x| = \frac{1}{3v^3} - \ln|v| + c$$

$$\ln|x| = \frac{x^3}{3y^3} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| + c$$

حل المعادلة التفاضلية

مثال 4

$$x^2 \cdot y dx = (x^3 + y^3) dy$$

$$\frac{x^2 \cdot y dx}{(x^3 + y^3) dx} = \frac{(x^3 + y^3) dy}{(x^3 + y^3) dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cdot y}{x^3 + y^3}$$

نقسم على x
أي x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2 \cdot y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{y^3}{x^3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3} \dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot v$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{v}{1+v^3}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - \frac{v}{1}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v - v(1+v^3)}{1+v^3}$$

خلف النسبت والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{v}{1-2v^2} dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{-1}{4} \int \frac{-4v}{1-2v^2} dv$$

مشتقة البقايا $(-4v)$

$$\ln|x| = \frac{-1}{4} \ln|1-2v^2| + c$$

$$\ln|x| = \frac{-1}{4} \ln\left|1-2 \cdot \frac{y^2}{x^2}\right| + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 5

$$(y^2 - x^2) dx + xy dy = 0$$

$$\frac{xy dy}{xy dx} = \frac{(x^2 - y^2) dx}{xy dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x \cdot y}$$

نقسم كل حد من حدود الكسرين بالمتغير x المتكرر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{x \cdot y}{x^2}} = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}} \quad (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot v$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

نعوض بمعادلة (1)

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{1 - v^2}{v}$$

توحيد مقامات

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{v} - \frac{v}{1} = \frac{1 - v^2 - v^2}{v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2 - v^2}{v}$$



$$\int \frac{dx}{x} = -\int v^{-2} dv$$

$$\ln|x| = \frac{-v^{-1}}{-1} + c$$

$$\ln|x| = \frac{1}{v} + c$$

$$\ln|x| = \frac{1}{\frac{y}{x}} + c$$

$$\ln|x| = \frac{x}{y} + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 6

$$(y^2 - xy) dx + x^2 dy = 0$$

$$\frac{x^2 dy}{x^2 (dx)} = \frac{(xy - y^2) dx}{x^2 dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1} \dots\dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x.v$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

$$x \frac{dv}{dx} + \cancel{x} = \cancel{x} - v^2$$

$$x \frac{dv}{dx} = -v^2$$

قلب النسبة والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{-1}{v^2} dv$$



قلبت النسب والضرب بـ dv

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-3v^2 - 4v - 1}{2 + 3v}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2 + 3v}{-3v^2 - 4v - 1} dv$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{3v + 2}{-(3v^2 + 4v + 1)} dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \int \frac{(2)(3v + 2)}{3v^2 + 4v + 1}$$

مشتقة البقام
 $6v + 4 =$ نحتاج (2)

$$\ln|x| = -\frac{1}{2} \ln|3v^2 + 4v + 1| + c$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{2} \ln\left|\frac{3y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} + 1\right| + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 7

$$(x + 2y) dx + (2x + 3y) dy = 0$$

$$\frac{(2x + 3y) dy}{(2x + 3y) dx} = \frac{(-x - 2y) dx}{(2x + 3y) dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x - 2y}{2x + 3y}$$

نقسم كل
 حد من حدود الطرف
 الأيمن على x مرفوعة
 لأكثر من

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{x}{x} - \frac{2y}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{3y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)}{2 + 3\left(\frac{y}{x}\right)} \dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v \quad (1) \text{ نعوض بمعادلة}$$

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{-1 - 2v}{2 + 3v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-1 - 2v}{2 + 3v} - \frac{v}{1} \quad \text{توحيد مقامات}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{(-1 - 2v) - v(2 + 3v)}{2 + 3v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-1 - 2v - 2v - 3v^2}{2 + 3v}$$

حل المسألة والنكامل

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v-1}{-v^2+2v+1} dv$$

مشتقة البقايا $-2v+2$

نحتاج -2

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{-2} \int \frac{-2(v-1)}{-v^2+2v+1} dv$$

$$\ln|x| = \frac{-1}{2} \ln|-v^2+2v+1| + c$$

$$\ln|x| = \frac{-1}{2} \ln\left|\frac{-y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} + 1\right| + c$$

حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} - 1} \quad (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{v+1}{v-1} \quad (1) \text{ نموذج بمعادلة}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{v-1} - \frac{v}{1}$$

لتوحيد مقامات

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{(v+1) - v(v-1)}{v-1}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v+1-v^2+v}{v-1}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-v^2+2v+1}{v-1}$$



حللت البصمة والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{3-v}{v^2-2v+1} dv$$

مشقة البصمة غير متوفرة ولا يمكن توفيرها بالبصمة.

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-(v-3)}{(v-1)^2} dv$$

عجلة صحت
واضافة

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \frac{(v-1)-2}{(v-1)^2} dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \left[\frac{(v-1)}{(v-1)^2} - \frac{2}{(v-1)^2} \right] dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \left[\frac{1}{(v-1)} - 2(v-1)^{-2} \right] dv$$

$$\ln|x| = - \left[\ln|v-1| - \frac{2(v-1)^{-1}}{-1} \right] + c$$

$$\ln|x| = - \left[\ln|v-1| + \frac{2}{v-1} \right] + c$$

$$\ln|x| = - \ln \left| \frac{y}{x} - 1 \right| - \frac{2}{\frac{y}{x} - 1} + c$$

تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مشبته لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الأستاذ والمطبعة وفق الاتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 9

$$(3x-y) \bar{y} = x+y$$

نقسم على معامل \bar{y} وهو $(3x-y)$

$$\frac{(3x-y) \bar{y}}{(3x-y)} = \frac{x+y}{3x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{3x-y}$$

نقسم كل حد من حدود الطرف الأيمن على x مرفوعة لأكثر من

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x} + \frac{y}{x}}{\frac{3x}{x} - \frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{3 - \frac{y}{x}} \dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

نعوض بمعادلة (1)

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{1+v}{3-v}$$

توحيد مقامات

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - \frac{v}{1}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{(1+v) - v(3-v)}{3-v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2-2v+1}{3-v}$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 11

$$\bar{y} = \frac{y}{x} + e^{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{1}{x}} \dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = v \cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

$$x \frac{dv}{dx} + \cancel{x} = \cancel{x} + e^v$$

$$x \frac{dv}{dx} = e^v$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{e^v} dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int e^{-v} dv$$

مشتقة الاس

$$\ln|x| = -e^{-v} + c$$

$$\ln|x| = \frac{-1}{e^v} + c$$

$$\ln|x| = \frac{-1}{e^{\frac{1}{x}}} + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 10

$$x \left(\frac{dy}{dx} - \tan \frac{y}{x} \right) = y$$

بالقسمة على x

$$\frac{dy}{dx} - \tan \frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \left(\frac{y}{x} \right) \dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = v \cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

نعوض بالمعادلة (1)

$$x \frac{dv}{dx} + \cancel{x} = \cancel{x} + \tan v$$

$$x \frac{dv}{dx} = \tan v$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{\tan v} dv \rightarrow \cot v$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{\cos v}{\sin v} dv$$

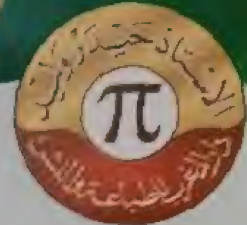
$$\ln|x| = \ln|\sin v| + c$$

$$\ln|x| = \ln\left|\sin \frac{y}{x}\right| + c$$

المعادلة التفاضلية متجانسة لأن زاوية tan بشكل $\frac{y}{x}$ كما ذكرناها في ملاحظات بداية الموضوع.

المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

Nots:



دار المغرب

الأستاذ حميد وليد



المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

2021



دار الفريب
07702729223

الأستاذ حميد وليد



المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

2021



ملازم دار النشر
07702729223

المُسْنَدُ فِي الرَّيَاضِيَّاتِ

الجزء
الثاني

٢٠٢١



المعادلات
التفاضلية

5

التكامل

4

تطبيقات
التفاضل

3

عند اقتناء ملزمتك من دار المغرب تأكد من وجود
الجلدة المدورة اللاصقة
في وجه الغلاف غير ذلك تعتبر مزورة .



mlazmna

الأستاذ حيدر وليد

07701780364

second
part

2021



السادس العلمي الأحيائي و التطبيقي



صفحة ملزم
دار النشر

نحذر من استنساخها ولا يجوز ذلك لكون فيها اشكال شرعي وقانوني
وغير ميراث الذمة والملازمة موثقة من دار الكتب والوثائق
علما ان ملازمنا حائزة على علامة تجارية من وزارة الصناعة
دائرة التطوير والتنظيم الصناعي

هام
للغاية

لجميع النسخ
التي تم توزيعها
في جميع
القطاعات

ملاحظة :- من صفحة 139 الى صفحة 147 (خاص بالتطبيقي)

جانب الكرخ

المركز الرئيسي مطبعة المغرب 07702729223

جانب الرصافة

07903230011	مكتبة الجوهرة - المنصور
07506988352	مكتبة العربية - لعمرية - ابن الجهم الشعبي
07506306329	مكتبة ابن مطير العربية - مجمع العباسية الشرايفي
07714075123	مكتبة آية - حي العبدل
07711124177	مكتبة الفقيه المنصور - ابن الرواح - عمارة برج الماس
07801885419	مكتبة الفقيه - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07800505058	مكتبة آية - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07705433379	مكتبة آية - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07901332833	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07701866098	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07832630030	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07804047014	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07801300200	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07817498813	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07700730994	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07736392810	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07805240242	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07702710731	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07704370050	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07704258595	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07704560438	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07707471214	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07709995682	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07903501673	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07821615412	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07833069920	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07713644472	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07818695644	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07704777686	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
0770789995	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح

مكتبة في بغداد
للشؤون الإدارية والمالية
07711130300

07702638801	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07718566655	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07753455111	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07751625230	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07713315551	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07722833262	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07760181191	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07707197770	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح

07705922272	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07733334104	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07732645653	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07711238143	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07752698414	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07719018516	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07768513122	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07991307898	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07712817964	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07765318230	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07707116111	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07709938949	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07901292023	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
0773557	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
0182381	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
0582020	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
0582397	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07168989	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
06530191	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
03361869	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07756160	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
0760194	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07937330	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
0606596	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
0653199	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
0653065	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
012294019	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
02474058	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
01467104	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
01147398	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
01584036	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح

ان شاء الله اكون قد تكلمت
بشيء / المراجعة الهامة جدا
جميلة وراقية وانصحكم
تشتروها وتوفر لكم
هواي وقت وبالاخير
يمكن! تدعولي بعهدي
يا أهلي انقبل طلب عام
و شكرا ... يا اباي

mlazmna

المركز التسويقي شارع المتقي 07719373555 07819373555

07719048333	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07708789643	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07801576208	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07816014615	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07827524412	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07803364615	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07711919969	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07832303772	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07826984033	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07725423700	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07802469001	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07726350721	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07719001002	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07821800900	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07807170745	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07802255075	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح

07723875335	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07725255932	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07713182440	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07812209161	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07828292236	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07801067833	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07801306615	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07800662212	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07740864133	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07511798067	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07713309033	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07510332312	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07717286828	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07701727822	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07503072983	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07518271021	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07702015878	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح

07831054822	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07902727220	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07828236703	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07809338325	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07814714141	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07810350840	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07830019999	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07702854488	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07703771003	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07817789408	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07712130374	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07809073977	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07801574901	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07831355322	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07801089423	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07702909912	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07725222984	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07827742264	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح

07702687911	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07902494935	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07703133928	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07702406444	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07903666349	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07707867592	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07711040655	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07711147502	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07706202828	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07729651805	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07724393211	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07722052602	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07731030555	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07705012700	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07705572853	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07710901616	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07707319377	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07707333790	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07716163457	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07827281950	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح
07807668443	مكتبة ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح - ابن الرواح

سعر النسخة للطالب
12 آلاف دينار

نحذر من استنساخها ونسجها من الأمانة عن طريق برامج الحاسوب أو أي وسيلة أخرى من شأنها أن تنتهك حقوق المؤلف. نحن لا نشجع بيع النسخ الممسوحة أو أي شكل آخر من أشكال النسخ غير المصرح به. نحن نطالب بالاعتراف العلني لأي شخص تم اكتشافه يبيع أو يوزع نسخاً غير مصرح بها. نحن نطالب بالتعويض عن الأضرار الناتجة عن أي شكل من أشكال النسخ غير المصرح به. نحن نطالب بالتعويض عن الأضرار الناتجة عن أي شكل من أشكال النسخ غير المصرح به.

كل نسخة لا تحمل
لمدة دائرية على وجه الغلاف
تعتبر موزعة